02/10/14

Γραφείο: 309 γ

Τηλέφωνο: 26510 08232

E-mail: abatsidis@uoi.gr

Συγγράμματα: Κάκκουλος (Αντίστοιχα Κεφάλαια Ύλης 2-4) ή
Βασιλείου (-"- -"- -"- 1-5)

Ορισμός Στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια, συλλογή τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σ' ένα χώρο πιθανοτήτων (*) (Ω, F, P). Δηλαδή $\{X(t), t \in T\}$, όπου t είναι μια παράμετρος ενός διατεταγμένου συνόλου T, που καλείται παραμετρικός χώρος.

(*) Χώρος πιθανοτήτων: Αποτελείται απ' την τριάδα (Ω, F, P), όπου Ω: διατεταγμένος χώρος, F: μια μη-κενή συλλογή υποσυνόλων του Ω με τις ακόλουθες ιδιότητες:
1) $\Omega \in F$
2) $A \in F \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in F$
3) Αν $A_1, A_2, \ldots$ μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία συνόλων του F, τότε $\bigcup_n A_n \in F$.

Και P: μέτρο πιθανότητας, δηλαδή μια μη-αρνητική συνάρτηση, αριθμήσιμα προσθετική, $P(\Omega)=1$.

Παράδειγμα (Ανάπτυξη Πληθυσμού)

Έστω $X(t)$ ο αριθμός των μελών ενός πληθυσμού τη χρονική στιγμή t

$X(0)$: αριθμός των μελών στην αρχή της μελέτης

Άρα, η στοχαστική διαδικασία είναι $\{X(t), 0 \le t < \infty\}$

$X(t) = X(0) + \Gamma(t) - \Pi(t)$, όπου $\Gamma(t)$: όσοι γεννήθηκαν στο διάστημα $(0,t)$
$\Pi(t)$: όσοι πέθαναν στο διάστημα $(0,t)$

Για την ακρίβεια: $X(t) = \max\{0, X(0) + \Gamma(t) - \Pi(t)\}$

Παράδειγμα (Οικολογική Αντιπαράθεση)

· Έστω 2 πληθυσμοί A και B, οι οποίοι ζουν σ' ένα περιβάλλον και βρίσκονται σε αντιπαράθεση. Κάθε φορά που ένα μέλος του A συναντήσει το B δίνουν μάχη και ή πεθαίνει το A ή πεθαίνει το B. Το A πεθαίνει με πιθανότητα p και το B πεθαίνει με πιθανότητα q και ισχύει $p+q=1$.

· Έστω $X(t)$ ο αριθμός των μελών του πληθυσμού A μετά την μάχη αντιπαράθεση που γίνεται τη χρονική στιγμή t.

Πιο σωστά: Έστω X_n ο αριθμός των μελών του πληθυσμού A μετά τη n-οστή αντιπαράθεση.

Τότε $X_{n+1} = X_n + \Gamma_n - \Pi_n + Z_n$, όπου:

X_{n+1}: αριθμός μελών του πληθυσμού A μετά την n+1 μάχη

X_n: αριθμός μετά την n-μάχη

Γ_n: όσοι γεννήθηκαν μεταξύ της n και της n+1 μάχης

Π_n: όσοι πέθαναν μεταξύ της n και της n+1 μάχης

Z_n: το αποτέλεσμα της n+1 μάχης με δυνατές τιμές 0, -1

$$P(Z_n=0)=p \quad , P(Z_n=-1)=q$$

Παράδειγμα (Έλεγχος Αποθεμάτων)

X_n: ο αριθμός των προϊόντων που βρίσκονται στην αποθήκη στη n-οστή επιθεώρηση

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + \Pi_n - Z_n \tau_n, & X_n + \Pi_n - Z_n \tau_n \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Παράδειγμα

X_n: η στοχαστική διαδικασία που παριστάνει την κατάσταση ενός συστήματος στη n-οστή επιθεώρηση

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{τέλεια} \\ 1, & \text{μερικώς καλά} \\ 2, & \text{χάλια} \end{cases}$$

(Στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο)

Κατάταξη Ταξινόμησης Στοχαστικής Διαδικασίας

1ο Κριτήριο Ταξινόμηση ως προς τον παραμετρικό χώρο T:

- στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο
- στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο

2ο Κριτήριο Χώρος καταστάσεων μιας στοχαστικής διαδικασίας είναι το σύνολο των δυνατών τιμών της σ.δ.
Συμβολίζεται με S

- σ.δ με διακριτό χώρο καταστάσεων
- σ.δ με συνεχή χώρο καταστάσεων

Εμείς θα ασχοληθούμε με σ.δ σε διακριτό χώρο με διακριτό χώρο καταστάσεων.

Μαρκοβιανή Ιδιότητα Μια σ.δ λέμε ότι είναι Μαρκοβιανή αν ισχύει ότι:

$$P(a<X_t<b \mid X_{t_1}=x_1, \dots, X_k=x_{t_k})=$$

$$P(a<X_t<b \mid X_{t_k}=X_k), \ \forall t, t, \dots, t_k : t>t_k>\dots>t_1$$

Μαρκοβιανή Αλυσίδα Είναι μια σ.δ σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων με την Μαρκοβιανή Ιδιότητα.

ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ

Ορισμός X_n: παριστάνει τη θέση ενός σωματιδίου που κινείται σε ένα οριζόντιο άξονα την n-οστή χρονική στιγμή.

Απλός Τυχαίος Περίπατος Είναι εκείνος που κάθε χρονική στιγμή η μετατόπισή του γίνεται ως εξής: ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα p, ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα q ή αναπήδηση.

Για τον τυχαίο περίπατο

X_0: αρχική κατάσταση

$X_1 = X_0 + Z_1$, όπου Z_1: τ.μ που παριστάνει την 1^{η} μετατόπιση

$X_2 = X_1 + Z_2$, Z_2 — // — 2^{η} — // —

⋮

Για τον απλό τυχαίο περίπατο

Η Z_i έχει δυνατές τιμές $0, 1, -1$ με

$$P(Z_i = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ q, & x = -1 \\ 1-p-q, & x = 0 \end{cases}$$

Ελεύθερος Τυχαίος Περίπατος

Είναι εκείνος που η κίνηση του σωματιδίου είναι ελεύθερη, δεν εμποδίζεται από τίποτα.

Π.χ X_n: η σ.δ που παριστάνει τον αριθμό των "παραπάνω" νικών που έχει ένας παίκτης A παίζοντας τάβλι απεριόριστα.

Τότε έχουμε απλό τυχαίο και ελεύθερο τυχαίο περίπατο.

Τυχαίος Περίπατος με Φράγματα Απορρόφησης

Φράγματα απορρόφησης είναι τα σημεία εκείνα που όταν πηγαίνει το σωματίδιο η κίνησή του σταματά.

Π.χ Ο παίκτης A έχει €10 και παίζει τάβλι με έναν παίκτη B που έχει €7. Όποιος χάνει δίνει στον άλλο €1.

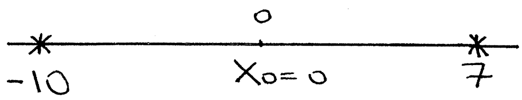
X_n: το κέρδος του παίκτη A τη n-οστή χρονική στιγμή.

Όταν φτάσει στο -10 η κίνηση τελειώνει

Όταν φτάσει στο 7 η κίνηση τελειώνει.

Το $-10, 7$ είναι φράγματα απορρόφησης

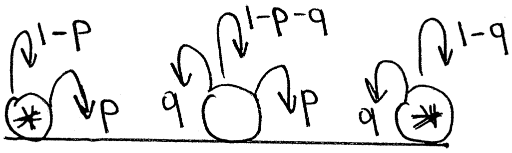
Άρα έχουμε απλό τυχαίο περίπατο με φράγματα απορρόφησης.



Φράγματα Ανάκλασης

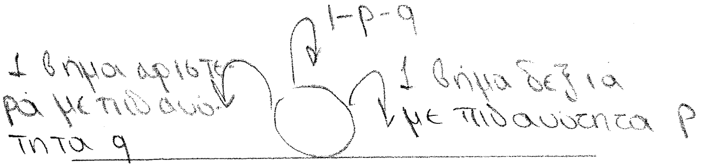
Είναι τα σημεία εκείνα που όταν φτάνει εκεί το σωματίδιο μπορεί να ξεφύγει μόνο προς συγκεκριμένη κατεύθυνση, δηλαδή η κίνησή του δεν σταματά.

Απλός Τυχαίος Περίπατος με 2 Φράγματα Ανάκλασης



09/10/14

ΕΛΕΥΘΕΡΟΣ ΑΠΛΟΣ ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ



X_n η σ.δ που περιγράφει τη θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή n

Υποθέτω ότι $X_0=0$

1ο Γενικό Ερώτημα: $P(X_n=k)$

2ο Γενικό Ερώτημα: $P(K_1\le X_n\le K_2)$

Άσκηση

Η Κατερίνα και η Ελένη παίζουν ένα παιχνίδι. Η πιθανότητα να κερδίσει η Κατερίνα είναι 1/2. Η πιθανότητα να κερδίσει η Ελένη είναι 1/3.

(α) Ποια η πιθανότητα η Ελένη να έχει, μετά από 10 παιχνίδια, 3 περισσότερες νίκες.

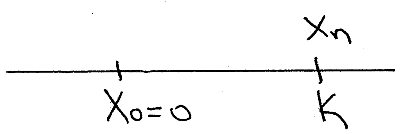
(β) Ποια η πιθανότητα μετά από 200 παιχνίδια η Ελένη να προηγείται στις νίκες από 20-30.

X_n: η σ.δ που περιγράφει το κέρδος της Ελένης μετά το n-οστό παιχνίδι.

(α) $P(X_{10}=3)$

(β) $P(20\le X_{200}\le 30)$

$K>0$



$$\left.\begin{array}{ll}\text{Βήματα Δεξιά} & : n_1\\ \text{Βήματα Αριστερά} & : n_2\\ \text{Αναπηδήσεις} & : n_3\end{array}\right\}\quad n_1+n_2+n_3=n \quad \text{Συνολικός αριθμός βημάτων}$$

$$n_1-n_2+0\cdot n_3=n_1-n_2=K \Rightarrow \boxed{K=n_1-n_2}$$

$K<0$ Η μόνη αλλαγή είναι: $\boxed{K=n_2-n_1}$

$$P(X_n=k) = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} P\begin{pmatrix} \text{να κανω } n_1 \text{ βηματα δεξια} \\ n_2 \quad \text{αριστερά} \\ n_3 \quad \text{αναπηδήσεις} \end{pmatrix}$$

Έστω X_1 η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των δεξιών βημάτων

X_2 –//– –//– –//– –//– αριστερών

X_3 –//– –//– –//– –//– τις αναπηδήσεις

$$= \sum_{\substack{n_1+n_3+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} P(X_1=n_1, X_2=n_2, X_3=n_3)$$

Έστω ότι έχω n βήματα □ □ . . . . □

Θέλω να δω σε ποιες από τις n δοκιμές έχουν έρθει τα n_1 βήματα

$\binom{n}{n_1}$ τρόποι επιλογής των δεξιών βημάτων με πιθανότητα πραγματοποίησης p^{n_1}.

Που μείνανε $n-n_1$ βήματα, τα n_2 θέλω να είναι αριστερά και τα διαλέγω ως

$\binom{n-n_1}{n_2}$ τρόποι επιλογής των αριστερών βημάτων με π.π q^{n_2}

Μείνανε $n-n_1-n_2$ και θέλω τις αναπηδήσεις n_3.

$\binom{n-n_1-n_2}{n_3} = 1$ τρόπος (όσα βήματα μείνανε σ'αυτά χωρούνε)

π.π $(1-p-q)^{n_3}$

$$= \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}} \binom{n}{n_1} p^{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} q^{n_2} \cdot 1 \cdot (1-p-q)^{n_3}$$

$$= \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=K}} \frac{n!}{n_1!\cancel{(n-n_1)!}} p^{n_1} \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\underbrace{(n-n_1-n_2)!}_{n_3}} q^{n_2} (1-p-q)^{n_3}$$

$$= \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=K}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} p^{n_1} q^{n_2} (1-p-q)^{n_3}$$

$$\boxed{P(X_n=K) = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=K}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} p^{n_1} q^{n_2} (1-p-q)^{n_3}}$$

(1^o Γενικό Ερώτημα)

Πολυωνυμική Κατανομή

Έστω ένα πείραμα που αποτελείται από n το πλήθος δοκιμές. Η κάθε μία εκ των οποίων έχει m δυνατά αποτελέσματα $C_1, C_2, \ldots, C_m$ με πιθανότητα πραγματοποίησης τους $P(C_i)=P_i$, $i=1,\ldots,m$. Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και η πιθανότητα πραγματοποίησης παραμένει σταθερή από δοκιμή σε δοκιμή. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_m$ τυχαίες μεταβλητές που παριστάνουν τον αριθμό των φορών πραγματοποίησης των $C_1,\ldots,C_m$ αντιστοίχως. Τότε η πιθανότητα

$$\boxed{P(X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_m=x_m) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_m!} P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_m^{x_m}}$$

με $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ ή $x_m = n-x_1-x_2-\ldots-x_{m-1}$

$P_1+P_2+\ldots+P_m=1$ ή $P_m = 1-P_1-P_2-\ldots-P_{m-1}$

<u>Παρατήρηση</u> Αν δεν έχω ισοπαλία (π.χ $p=\frac{1}{3}, q=\frac{2}{3}$ δηλ. $p+q=1$)

$$(\Sigma)\begin{cases} n_1+n_2=n \\ n_1-n_2=K \end{cases}$$ Το λύνω και βρίσκω το n_1 και το n_2

Άρα το άθροισμα δεν υπάρχει ή <u>δε</u> γράφω το $(1-p-q)$

π.χ γράφω $\frac{10!}{7!\,3!} p^7 q^3$

2º Γενικό Ερώτημα

$P(K_1 \le X_n \le K_2)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, $K_1, K_2 > 0$ ή $K_1, K_2 < 0$ (δεν έχει νόημα να θέσω το ένα θετικό και το άλλο αρνητικό, πρέπει να είναι ομόσημα).

[Y μια διακριτή τυχαίου μεταβλητή

$P(a \le Y \le b) = P(Y=a) + P(Y=a+1) + \dots + P(Y=b)$]

$$\boxed{P(K_1 \le X_n \le K_2) = \sum_{K=K_1}^{K_2} P(X_n = K) = \sum_{K=K_1}^{K_2} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=K}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} p^{n_1} q^{n_2} (1-p-q)^{n_3}}$$

Για το αρχικό παράδειγμα

$P(20 \le X_{200} \le 30)$ $\quad K_1 = 20,\ K_2 = 30$

$n_1 + n_2 + n_3 = 200$

$n_1 - n_2 = K$ (Το οποίο παίρνει τιμές από K_1 μέχρι K_2, δηλ. από 20 έως 30)

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)

Έστω $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ n το πλήθος ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη μέση τιμή και πεπερασμένη διακύμανση.

$$\mu = E(Y_i) < \infty \qquad \underset{\sigma^2}{\underset{\parallel}{Var(Y_i)}} < \infty$$

$E(\Sigma Y_i) = \Sigma E Y_i = \Sigma \mu = n\mu$

$Var(\Sigma Y_i) = \Sigma Var Y_i = \Sigma \sigma^2 = n\sigma^2$

για μεγάλα μεγέθους δείγματα (n μεγάλο)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - \overset{\text{μέση τιμή}}{n\mu}}{\underset{\text{απόκλιση}}{\sqrt{n\sigma^2}}} \overset{\text{Προσ.}}{\sim} N(0,1)$$

$X_0 = 0$

$X_1 = Z_1$ όπου Z_1 η τ.μ που παριστά την 1η μετατόπιση

$X_2 = Z_2 + X_1 = Z_1 + Z_2$

$X_3 = X_2 + Z_3 = Z_1 + Z_2 + Z_3$

⋮

$X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, όπου Z_i η τ.μ που παριστάνει την i-οστή μετατόπιση.

$$P(Z_i = x) = \begin{cases} p & , x = 1 \\ q & , x = -1 \\ 1-p-q & , x = 0 \end{cases}$$

(Στον ελεύθερο απλό τυχαίο περίπατο)

μέση τιμή

$\mu = EZ_i = p \cdot 1 + q(-1) + (1-p-q) \cdot 0 = p - q \Rightarrow \boxed{\mu = p - q}$

$\sigma^2 = Var(Z_i) = EZ_i^2 - (EZ_i)^2 = (p+q) - (p-q)^2 \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = (p+q) - (p-q)^2}$

διασπορά

$EZ_i^2 = p \cdot 1^2 + q(-1)^2 + (1-p-q) \cdot 0^2 = p + q$

$P(K_1 \leq X_n \leq K_2) = P\left(K_1 \leq \sum_{i=1}^{n} Z_i \leq K_2\right)$

[ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ]

$= P\left(K_1 - 0.5 < \sum Z_i < K_2 + 0.5\right)$

για να φύγει η ισότητα

$= P\left(\frac{K_1 - 0.5 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{\sum Z_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{K_2 + 0.5 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

(?)

$= P\left(\frac{K_1 - 0.5 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < Z < \frac{K_2 + 0.5 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \underset{\approx}{\overset{\text{προσ.}}{}} N(0,1)$

$= \Phi\left(\frac{K_2 + 0.5 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{K_1 - 0.5 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

Φ η σ.κ.κ της $N(0,1)$

Παρατηρήσεις: 1. Όταν η μέση τιμή των μετατοπίσεων είναι θετική $\mu = EZ_i > 0$ και $n \to \infty$ τότε

$$P(X_n \geq j) \longrightarrow 1$$, j μεγάλος θετικός αριθμός

2. Όταν $\mu < 0$ και $n \to \infty$ τότε

$$P(X_n < j) \to 1$$, j μεγάλος αρνητικός αριθμός.

Απόδειξη:

1. $P(X_n > j) = 1 - P(X_n \leq j)$

$= 1 - P(\sum Z_i \leq j)$

$= \ldots$

$= 1 - \Phi\left(\frac{j + 0.5 - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

$= 1 - \Phi(\cancel{-}\infty)$ 0

$= 1$

2. $P(X_n < j) = P(\sum Z_i < j)$

$= \Phi\left(\frac{j - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$

$= \Phi(+\infty)$

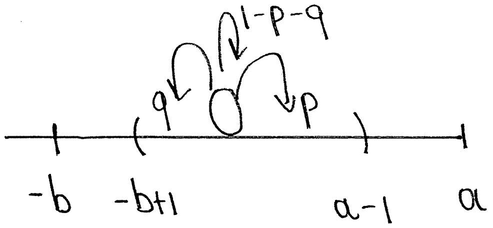
$= 1.$

Το $\mu = p - q$ αν $\mu > 0$ $(p > q)$ δηλ. πιθανότητα δεξιού βήματος $>$ πιθανότητα αριστερού βήματος.

$\mu < 0$ $(q > p)$ — // $<$ — //

άρα ο παίχτης θα χάσει.

Απλός Τυχαίος Περίπατος με δύο φράγματα απορρόφησης



Τα φράγματα a και -b σταματάνε την κίνηση του σωματιδίου.

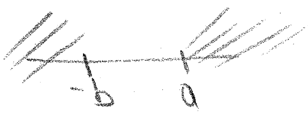
Στο $(-b+1, a-1)$ το σωματίδιο κινείται απεριόριστα.

$a, -b$ φράγματα απορρόφησης με $a, b > 0$

$$P(Z_i = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ q, & x = -1 \\ 1-p-q, & x = 0 \end{cases}$$

$P\left(\begin{matrix}\text{να κινείται το σωματίδιο} \\ \text{απεριόριστα}\end{matrix}\right)$

$$P(-b+1 \leq X_n \leq a+1) \leq \underbrace{P(-b+1 \leq X_n^* \leq a-1)}_{\text{πιθανότητα ελεύθερου}}$$, όπου X_n^* αντίστοιχη στοχαστική διαδικασία του ελεύθερου



Δεν περιορίζεται, υπερβαίνουμε για το $[-b, a]$ γι' αυτό και η πιθανότητα του ελεύθερου είναι μεγαλύτερη.

να κάνω τα βήματα που έκανα και πριν $\Longrightarrow$ $\vdots$

$$\simeq \Phi\left(\frac{a-1+0.5-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-b+1-0.5-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\mu>0} \Phi(-\infty) - \Phi(-\infty) = 0$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\mu<0} \Phi(+\infty) - \Phi(+\infty) = 0$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\mu=0} \Phi(0) - \Phi(0) = 0$$

Άρα έχω μια πιθανότητα φραγμένη πάνω από το 0.

Άρα P(να κινείται απεριόριστα)$=0$ και επομένως

P(τελικά να απορροφηθεί)$= 1$.

P(τελικής απορρόφησης)$=1 \Rightarrow P$(τελ. απορ. στο a) $+ P$(τελ. απορ. στο $-b$)$=1$.

P(τελ. απορ. στο a δεδομένου ότι $X_0=j$)$=$

$= P$(να βρεθώ για 1η φορά τη χρονική στιγμή n στην κατάσταση a, ενώ τις προηγούμενες στιγμές δεν πήγα ούτε στο a ούτε στο $-b$, δεδομένου ότι $X_0=j$, για όλες τις δυνατές χρονικές στιγμές n)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X_n=a, X_i \neq a, -b, i<n \,/\, X_0=j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ja}^{(n)}$$

Ειδικές Περιπτώσεις: $f_{aa}^{(0)} = 1 \ (X_0=a)$

$f_{aa}^{(n)} = 0 \ , n \neq 0$

$f_{-ba}^{(n)} = 0$

$$f_{ja}^{(n)} = P\left(\begin{matrix} X_n=a \\ X_j \neq a,-b \end{matrix} \middle| X_0=j\right) = P$$

n βήματα $j \to a$ ενώ πριν δεν έχει πάει στα $a,-b$

(από το j να πάει στο $j+1$ στο 1ο βήμα και (∩) από εκεί ($j+1$) στο a σε $n-1$ βήματα χωρίς να περάσει από τα $a,-b$) A_1

ή(∪) από το j να πάει στο $j-1$ στο 1ο βήμα και (∩) από εκεί στο a σε $n-1$ βήματα χωρίς να περάσει από τα $a,-b$ A_2

ή(∪) από το j να ακινητήσει στο j στο 1ο βήμα και (∩) από εκεί στο a σε $n-1$ βήματα χωρίς να περάσει από τα $a,-b$ A_3

$$= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

{ξένα ενδεχόμενα μεταξύ τους. Η ένωση ξένων ενδεχομένων ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων.} 5

$$f_{ja}^{(n)} = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

ξένα μεταξύ τους

$$= P(A_{11}\cap A_{12})+P(A_{21}\cap A_{22})+P(A_{31}\cap A_{32})$$

$$= P(A_{11})P(A_{12})+P(A_{21})P(A_{22})+P(A_{31})P(A_{32})$$

$$= p\, f_{j+1a}^{(n-1)} + q\, f_{j-1a}^{(n-1)} + (1-p-q) f_{ja}^{(n-1)}$$

$$\boxed{f_{ja}^{(n)} = p\, f_{j+1a}^{(n-1)} + q\, f_{j-1a}^{(n-1)} + (1-p-q) f_{ja}^{(n-1)}}$$

Εξίσωση Διαφορών 2ου βαθμού ως προς j και 1ου βαθμού ως προς n.

Προυποθέσεις: $f_{aa}^{(0)}=1 \quad f_{-ba}^{(n)}=0=f_{aa}^{(n)}=0, \; n\neq 0$

$$F_{ja}(\varsigma)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_{ja}^{(n)} \varsigma^n$$

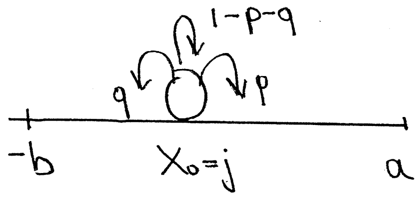
Συνάρτηση Γεννήτρια (για να απαλλαγώ από ένα δείκτη, j ή a)

Για να συγκλίνει: $|\varsigma|\leq 1$

$$F_{ja}(1)=\sum f_{ja}^{(n)}\cdot 1^n$$

[Από εδώ μπορώ να βρω την πιθανότητα τελικής απορρόφησης $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ja}^{(n)}$]

16/10/1? Πέμπτη



$P(\text{τελικής απορρόφησης}) = 1$

$\Rightarrow P(\text{τελ. απορ. στο } a) + P(\text{τελ. απορ. στο } -b) = 1$

$$P(\text{τελ. απορ. στο } a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ja}^{(n)}$$

$$f_{ja}^{(n)} = P\left(\begin{matrix} X_n = a \\ X_i \neq a, -b, \ i<n \end{matrix} \middle| X_0 = j \right)$$

<u>Συνθήκες:</u> $f_{aa}^{(0)} = 1$

$f_{(aa)}^{(n)} = 0 \quad , n \neq 0$

$f_{-ba}^{(n)} = 0$, για όλα τα n

$$f_{ja}^{(n)} = p\, f_{j+1a}^{(n-1)} + q\, f_{j-1a}^{(n-1)} + (1-p-q)\, f_{ja}^{(n-1)}$$

[j+1, j-1 άρα 2ου βαθμού ως προς j
n, n-1 άρα 1ου βαθμού ως προς n]

$$F_{ja}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ja}^{(n)} s^n \quad , |s| \leq 1 \quad (\text{Γεννήτρια Συνάρτηση})$$

$$F_{ja}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ja}^{(n)} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ja}^{(n)} = P(\text{τελ. απορ. στο } a)$$

Για $n=0$: $f_{ja}^{(0)} = 0$

$n=1$: $f_{ja}^{(1)} = p\, f_{j+1a}^{(0)} + q\, f_{j-1a}^{(0)} + (1-p-q)\, f_{ja}^{(0)}$

$n=2$: $f_{ja}^{(2)} = p\, f_{j+1a}^{(1)} + q\, f_{j-1a}^{(1)} + (1-p-q)\, f_{ja}^{(1)}$

$n=3$: $f_{ja}^{(3)} = p\, f_{j+1a}^{(2)} + q\, f_{j-1a}^{(2)} + (1-p-q)\, f_{ja}^{(2)}$

$\vdots$

$$f_{ja}^{(n)} = p f_{j+1a}^{(n-1)} + q f_{j-1a}^{(n-1)} + (1-p-q) f_{ja}^{(n-1)}$$

Πολ/ζω:

$$s^0 \cdot f_{ja}^{(0)} = 0$$

$$s^1 \cdot f_{ja}^{(1)} = p f_{j+1a}^{(0)} + q f_{j-1a}^{(0)} + (1-p-q) f_{ja}^{(0)}$$

Αθροίζω +

$$s^2 \cdot f_{ja}^{(2)} = p f_{j+1a}^{(1)} + q f_{j-1a}^{(1)} + (1-p-q) f_{ja}^{(1)}$$

$$s^3 \cdot f_{ja}^{(3)} = p f_{j+1a}^{(2)} + q f_{j-1a}^{(2)} + (1-p-q) f_{ja}^{(2)}$$

$\vdots$

$$s^n \cdot f_{ja}^{(n)} = p f_{j+1a}^{(n-1)} + q f_{j-1a}^{(n-1)} + (1-p-q) f_{ja}^{(n)}$$

$$F_{ja}(s) = p\left(s^1 f_{j+1a}^{(0)} + s^2 f_{j+1a}^{(1)} + \dots\right)$$
$$+ q\left(s^1 f_{j-1a}^{(0)} + s^2 f_{j-1a}^{(1)} + \dots\right)$$
$$+ (1-p-q)\left(s^1 f_{ja}^{(0)} + s^2 f_{ja}^{(1)} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow F_{ja}(s) = p \cdot s\left(s^0 f_{j+1a}^{(0)} + s^1 f_{j+1a}^{(1)} + \dots\right)$$
$$+ q s\left(s^0 f_{j-1a}^{(0)} + s^1 f_{j-1a}^{(0)} + \dots\right)$$
$$+ (1-p-q) s\left(s^0 f_{ja}^{(0)} + s^1 f_{ja}^{(1)} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow F_{ja}(s) = p s F_{j+1a}(s) + q s F_{j-1a}(s) + (1-p-q) s F_{ja}(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{p s F_{j+1a}(s) - [1-(1-p-q)s] F_{ja}(s) + q s F_{j-1a}(s) = 0}$$

Εξίσωση Διαφορών 2ου Βαθμού ως προς j

(Δεν έχω n.)

Για να λύσω αυτή την εξίσωση πρέπει να σχηματίσω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού, το οποίο είναι:

$$\boxed{ps\lambda^2-(1-(1-p-q)s)\lambda+qs=0}$$

Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

(I) $\Delta>0$

$F_{ja}(s)=A\lambda_1^j(s)+B\lambda_2^j(s)$, όπου $\lambda_1(s),\lambda_2(s)$ διακεκριμένες ρίζες του χαρακτηριστικού με $\lambda_1(s)>\lambda_2(s)$ και A,B σταθερές.

(II) $\Delta=0$

$F_{ja}(s)=A\lambda^j(s)+Bj\lambda^j(s)$ με $\lambda(s)$ διπλή ρίζα και A,B σταθερές

Πρέπει να εξετάσω αν όντως $\Delta\geq 0$ (δηλ. δεν έχω $\Delta<0$)

Πρέπει να προσδιορίσω κάθε φορά τα A,B.

Διακρίνουσα του χαρακτηριστικού:

$$\Delta=(1-(1-p-q)s)^2-4pqs^2$$

Άρα $\Delta\geq 0$ όταν: Πάντα θετικός για $\boxed{s\in(0,1)}$ άσχετα αν είπαμε ότι συγκλίνει.

$$(1-(1-p-q)s)^2\geq 4pqs^2$$

$$\left[0\leq 1-p-q\leq 1 \Rightarrow \boxed{0\leq 1-(1-p-q)s}\right]$$

$$1-(1-p-q)s\geq 2\sqrt{p}\sqrt{q}\,s$$

$$\left[2\sqrt{pq}+(1-p-q)\right]s\leq 1 \Rightarrow \boxed{s\leq \frac{1}{2\sqrt{pq}+(1-p-q)}}$$

Αν δείξω ότι $\frac{1}{2\sqrt{pq}+(1-p-q)} = 1+\varepsilon$, όπου $\varepsilon > 0$ ισχύει, διότι το

ζ ανήκει μεταξύ του 0 και του 1.

Επομένως, αρκεί νδο $\frac{1}{2\sqrt{pq}+(1-p-q)} = 1+\varepsilon,\ \varepsilon>0$

Άρα αρκεί νδο $2\sqrt{pq}+(1-p-q) \leq 1$

$$\Rightarrow p+q-2\sqrt{pq} \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2 \geq 0 \quad \text{Ισχύει!}$$

Προσδιορισμός των σταθερών A, B: ($\Delta>0$)

Για $j=a$: $F_{aa}(\zeta) = A\lambda_1^{(a)} + B\lambda_2^{(a)}$

$$\Rightarrow \boxed{A\lambda_1^{a} + B\lambda_2^{a} = 1} \quad (1)$$

Για $j=-b$: $F_{-ba}(\zeta) = A\lambda_1^{-b} + B\lambda_2^{-b}$

$$\Rightarrow \boxed{A\lambda_1^{-b} + B\lambda_2^{-b} = 0} \quad (2)$$

$$F_{aa}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{aa}^{(n)} \zeta^n = \cancelto{1}{f_{aa}^{(0)}} \zeta^0 + \cancelto{0}{f_{aa}^{(1)}} \zeta^1 + \cancelto{0}{f_{aa}^{(2)}} \zeta^2 + \ldots = \underline{\underline{1}}$$

$$F_{-ba}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cancelto{0}{f_{-ba}^{(n)}} \zeta^n = \underline{\underline{0}}$$

Άρα έχω: $\begin{cases} A\lambda_1^{a} + B\lambda_2^{a} = 1 & \Big|\ (\lambda_1^{-b}) \\ A\lambda_1^{-b} + B\lambda_2^{-b} = 0 & \Big|\ (\lambda_1^{a}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\lambda_1^{a-b} + B\lambda_2^{a}\lambda_1^{-b} = \lambda_1^{-b} \\ A\lambda_1^{-b}\lambda_1^{a} + B\lambda_2^{-b}\lambda_1^{a} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow B\left(\rho_2^{a}\rho_1^{-b}-\rho_2^{-b}\rho_1^{a}\right)=\rho_1^{-b}$$

$$\Rightarrow \boxed{B=-\frac{\rho_2^{\,b}}{\rho_1^{a+b}-\rho_2^{a+b}}} \qquad \boxed{A=\frac{\rho_1^{\,b}}{\rho_1^{a+b}-\rho_2^{a+b}}}$$

Άρα: $F_{ja}(s)=A\rho_1^{j}(s)+B\rho_2^{j}(s)$

$$=\frac{\rho_1^{b+j}(s)}{\rho_1^{a+b}(s)-\rho_2^{a+b}(s)}-\frac{\rho_2^{b+j}(s)}{\rho_1^{a+b}(s)-\rho_2^{a+b}(s)}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{ja}(s)=\frac{\rho_1^{b+j}(s)-\rho_2^{b+j}(s)}{\rho_1^{a+b}(s)-\rho_2^{a+b}(s)}}$$, όταν $\Delta>0$

$F_{ja}(s)=A\rho^{j}(s)+B\cdot j\cdot\rho^{j}(s)$ $(\Delta=0)$

Για $j=a$: $F_{aa}(s)=A\rho^{a}+B\cdot a\rho^{a}$

$\Rightarrow \boxed{A\rho^{a}+B\cdot a\rho^{a}=1}$ (1')

Για $j=-b$: $F_{-ba}(s)=A\rho^{-b}+B(-b)\rho^{-b}$

$\Rightarrow \boxed{A\rho^{-b}-Bb\rho^{-b}=0}$ (2')

$$\begin{cases} A\rho^{a}+Ba\rho^{a}=1 & \Big|\ \rho^{-b} \\ A\rho^{-b}-Bb\rho^{-b}=0 & \Big|\ \rho^{a}\end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{A=\frac{b}{a+b}\rho^{-a}} \text{ και } \boxed{B=\frac{\rho^{-a}}{a+b}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{ja}(s)=\frac{b+j}{a+b}\rho^{j-a}(s)}$$, όταν $\Delta=0$

$P(\text{τελ. απορ. στο } a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ja}^{(n)} = F_{ja}(1)$

Έχω επομένως σε κάθε περίπτωση να προσδιορίσω τα $\lambda_1(1), \lambda_2(1)$ ή το $\lambda(1)$, όπου

$\lambda_1(1) > \lambda_2(1)$ διακεκριμένες ρίζες του

$$p\lambda^2 - [1-(1-p-q)\cdot 1]\lambda + q = 0$$

και

$\lambda(1)$ η διπλή ρίζα του

$$p\lambda^2 - [1-(1-p-q)]\lambda + q = 0$$

$$p\lambda^2 - (p+q)\lambda + q = 0$$

$$\Delta = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$$

Γενικά:
(i) $\Delta > 0$ όταν $p \neq q$
(ii) $\Delta = 0$ όταν $p = q$

(i) $$\lambda_{1,2} = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p-q)^2}}{2p} = \frac{(p+q) \pm |p-q|}{2p}$$

$p>q$: $$\frac{(p+q)\pm(p-q)}{2p} = \begin{cases} \frac{q}{p} = \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 \end{cases}$$

$p<q$: $$\frac{(p+q)\pm(q-p)}{2p} = \begin{cases} \frac{q}{p} = \lambda_1 \\ 1 = \lambda_2 \end{cases}$$

Άρα όταν $p>q$:

$$F_{ja}(1) = \frac{1^{b+j} - \left(\frac{q}{p}\right)^{b+j}}{1^{a+b} - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

ενώ όταν $p<q$:

$$F_{ja}(1) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{b+j} - 1^{b+j}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1^{a+b}}$$

$$F_{ja}(1) = \frac{\dfrac{p^{b+j}-q^{b+j}}{p^{b+j}}}{\dfrac{p^{a+b}-q^{a+b}}{p^{a+b}}} \Rightarrow \boxed{F_{ja}(1) = p^{a+j}\,\frac{p^{b+j}-q^{b+j}}{p^{a+b}-q^{a+b}}} \quad , \; p\neq q$$

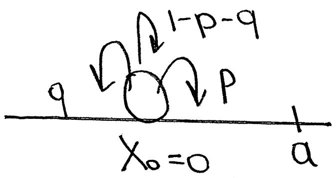
(ii) $\Delta = 0 \Rightarrow (p-q)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{p=q}$

$$\lambda(1) = \frac{p+q}{2p} \overset{p=q}{=\!=\!=} 1 \text{ διπλή ρίζα}$$

$$\boxed{F_{ja}(1) = \frac{b+j}{a+b}} \quad , \; p=q$$

[Άσκηση: P(τελ. απορ. σε $-b$) χωρίς να κάνω $1 - P$(τελ. απορ. στο a) Να ακολουθήσω την ίδια μεθοδολογία $F_{j-b}(s)$ και $f_{j-b}(1)$;]

Απλός Τυχαίος Περίπατος με ΕΝΑ φράγμα απορρόφησης



$F_{0a}(s) =$

P(απορ. στο a)

Το $-b$ πήγε στο ∞, επομένως πηγαίνω στους τύπους με τα 2 φράγματα και στέλνω το $-b$ στο ∞ (όριο).

$$\Delta>0 \quad F_{0a}(s) = \frac{\lambda_1^{b}(s) - \lambda_2^{b}(s)}{\lambda_1^{a+b}(s) - \lambda_2^{a+b}(s)} \qquad \Delta = 0 \quad F_{0a}(s) = \frac{b\lambda^{-a}(s)}{a+b}$$

$$P(\text{απορ. στο } a) = \frac{b}{a+b} \quad , \; p=q$$

$\Delta>0$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\lambda_1^b-\lambda_2^b}{\lambda_1^{a+b}-\lambda_2^{a+b}}=\lim_{b\to\infty}\frac{\lambda_1^b\left(1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^b\right)}{\lambda_1^{a+b}\left(1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{a+b}\right)}\overset{\lambda_1>\lambda_2}{=\!=}\frac{1}{\lambda_1^a}(\$)=\lambda_1^{-a}(\$)$$

$\Delta=0$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b\lambda^{-a}}{a+b}=\lambda^{-a}(\$)$$

$\lambda_1(1);$

$\lambda(1);$

Όταν $p>q$: $\boxed{\lambda_1=1}$ και $\boxed{\lambda_2=\frac{q}{p}}$

$p<q$: $\boxed{\lambda_1=\frac{q}{p}}$ και $\boxed{\lambda_2=1}$

$p=q$: $\boxed{\lambda(1)=1}$

$P(\text{απορ. στο } a)=1$, όταν $p=q$

$P(\text{απορ. στο } a)=1$, όταν $p>q$

$P(\text{απορ. στο } a)=\left(\frac{q}{p}\right)^{-a}=\left(\frac{p}{q}\right)^a$, όταν $p<q$

Επομένως $P(\text{απορ. στο } a)=1$, όταν $p\geq q$

$P(\text{απορ. στο } a)=\left(\frac{p}{q}\right)^a$, όταν $p<q$

Αν $p\geq q$ η απορρόφηση είναι σίγουρη, ενώ αν $p<q$ τότε με πιθανότητα $1-\left(\frac{p}{q}\right)^a$ το σωματίδιο παραμένει συνεχώς σε καταστάσεις μικρότερες του a, άρα με πιθανότητα $\left(\frac{p}{q}\right)^a$ ο περίπατος έχει πεπερασμένη διάρκεια

Άσκηση:

Να βρεθεί P(απορ. στο $-b$) όταν έχω 1 φράγμα απορρόφησης στο $-b$

Πρέπει νδο $P(\text{απορ. στο } -b)=1$, όταν $p\le q$ και $P(\text{απορ. στο } -b)=\left(\frac{q}{p}\right)^b$, όταν $p>q$.

Τυχαίος Περίπατος με μετατοπίσεις που περιγράφονται από μια κατανομή, δύο φράγματα απορρόφησης και αρχική θέση $X_0=0$

$-b \qquad X_0=0 \qquad a$, $b,a>0$

Μετατοπίσεις Z_i

Έστω ένας τυχαίος περίπατος που η θέση του τη χρονική στιγμή n

$$X_n=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$$

όπου Y_i οι τ.μ που παριστάνουν την i-οστή μετατόπιση.

και είναι τ/ω

$$E(Y_i)=\mu \qquad Var(Y_i)=\sigma^2$$

και

$$g(s)=E[e^{sY}],\ s\in S\subseteq \mathbb{R} \quad \text{(Ροπογεννήτρια)}$$

Έστω a και $-b$ 2 φράγματα απορρόφησης και X_T η τ.μ που παριστάνει τη θέση της στοχαστικής διαδικασίας κατά τη στιγμή της απορρόφησης. Τότε ισχύει ότι:

$$\text{Wald: } \underbrace{E\left[g(s)^{-T}\cdot \exp(sX_T)\right]}_{\text{αναμενόμενη τιμή}}=1,\ \forall s$$

$$Eh(x)=\begin{cases}\sum h(x)\cdot P(X=x), & \text{διακρ.}\\ \int h(x) f_X(x)dx, & \text{συν.}\end{cases}$$

$$g(\theta)=E\left[e^{\theta Y}\right]=\begin{cases}\sum e^{\theta y}P(Y=y)\\ \int e^{\theta y}f_Y(y)\,dy\end{cases}$$

$$g(\theta)=E\left[e^{\theta Y}\right],\quad g(0)=E(e^{0\cdot Y})=E(1)=1$$

$$g'(\theta)=E\left[Ye^{\theta Y}\right],\quad g'(0)=E(Y)=\mu$$

$$g''(\theta)=E\left[Y^2e^{\theta Y}\right],\quad g''(0)=E(Y^2)$$

Γενικά: $\boxed{EX^r=g^{(r)}(0)}$

Έστω ότι $\exists\,\theta_0$ τ/ω

$$g(\theta_0)=1,\quad \theta_0\neq 0$$

$$E\left[\underbrace{g(\theta_0)}_{1}{}^{-T}\cdot\exp(\theta_0X_T)\right]=1\Rightarrow$$

$E\left(\exp(\theta_0X_T)\right)=1\Rightarrow$ X_T παίρνει τις τιμές $a,-b$ άρα είναι διακριτή

$$\sum_{z=a,-b}\exp(\theta_0X_T)\cdot P(X_T=z)=1\Rightarrow$$

πιθ. τερμ. απορ. στο a πιθ. τερμ. απορ. στο $-b$

$$e^{\theta_0\cdot a}\underbrace{P(X_T=a)}_{A}\;e^{\theta_0(-b)}\cdot\underbrace{P(X_T=-b)}_{1-A}=1\Rightarrow$$

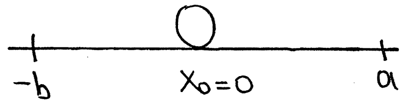
$$A=\frac{1-\exp(-\theta_0b)}{\exp(\theta_0a)-\exp(-\theta_0b)}\qquad B=1-A=\frac{\exp(\theta_0a)-1}{\exp(\theta_0a)-\exp(-\theta_0b)}$$

☆ Αν $g(\theta_0)\neq 1,\ \forall\theta_0\neq 0$

$\lim_{\theta_0\to 0}$ στα A,B.

$$A=\frac{b}{a+b},\quad B=\frac{a}{a+b}.$$

23.10.1
Πέμπτη



$a,b>0$

$$X_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Y_i: την i-οστή μετατόπιση, ανεξ. τ.μ

$EY_i=\mu$, $Var\,Y_i=\sigma^2$

$g(\xi)=E(e^{\xi Y})$, $\xi\in A\subseteq \mathbb{R}$

Wald: $E\left(g(\xi)^{-T}\exp(\xi X_T)\right)=1, \forall \xi$, X_T: η θέση του σωματιδίου τη στιγμή της απορρόφησης. Δυνατές τιμές: $a,-b$.

Ερωτήματα

1o $P(\text{τελ. απορ.})=1$

2o $P(\text{τελ. απορ. στο } a)=;$ $P(\text{τελ. απορ. στο } -b)=;$

3o Μέσος Χρόνος απορρόφησης.

Ισχυρίζομαι ότι $\exists \xi_0\neq 0$ τ.ώ $g(\xi_0)=1$.

Το θεωρώ έτσι, ούτως ώστε στην Wald να φύγει το $g(\xi)$ αλλά να διατηρήσω το $\exp(\xi X_T)$.

$g(\xi)=E(e^{\xi Y})$

$g(0)=E(e^{0Y})=E(1)=1$

Για αυτό το ξ_0 ισχύει η ταυτότητα Wald

$$E[g(\xi_0)^{-T}\exp(\xi_0X_T)]=1 \Rightarrow E[e^{\xi_0X_T}]=1 \Rightarrow \sum_{\substack{\text{Δυνατές}\\ \text{τιμές}\\ \text{της } X_T,\,x}} e^{\xi_0 X_T}P(X_T=x)=1$$

$$\Rightarrow 1=e^{\xi_0 a}\underbrace{\overset{P(\text{τελ. απορ. στο } a)}{\overset{\parallel}{P(X_T=a)}}}_{A}+e^{-\xi_0 b}\underbrace{P(X_T=-b)}_{1-A}$$

$$\Rightarrow e^{\xi_0 a}A+e^{-\xi_0 b}(1-A)=1$$

$$\Rightarrow A=\frac{1-e^{-\xi_0 b}}{e^{\xi_0 a}-e^{-\xi_0 b}},\ \xi_0\neq 0,\quad B=\frac{e^{\xi_0 a}-1}{e^{\xi_0 a}-e^{-\xi_0 b}},\ \xi_0\neq 0$$

• Αν δεν υπάρχει $\xi_0 \neq 0$ τ.ώ. $g(\xi_0)=1$, τότε:

$$A = P(\text{τελ. αποφ. στο } a) = \lim_{\xi_0 \to 0} \frac{1-e^{-\xi_0 b}}{e^{\xi_0 a} - e^{-\xi_0 b}} = \lim_{\xi_0 \to 0} \frac{b e^{-\xi_0 b}}{a e^{\xi_0 a} + b e^{-\xi_0 b}} = \frac{b}{a+b}.$$

Άρα:

$$A = \frac{b}{a+b} \quad , \text{αν } \nexists\, \xi_0 \neq 0 \,,\, g(\xi_0)=1$$

$$B = 1 - A = \frac{a}{a+b} \quad , \text{αν } \nexists\, \xi_0 \neq 0 \ \ g(\xi_0)=1.$$

▶ Πότε $\exists \xi_0 \neq 0$ τ.ώ. $g(\xi_0)=1$;

Όταν $\mu = EY \neq 0$

<u>Σκιαγράφηση Απόδειξης</u>

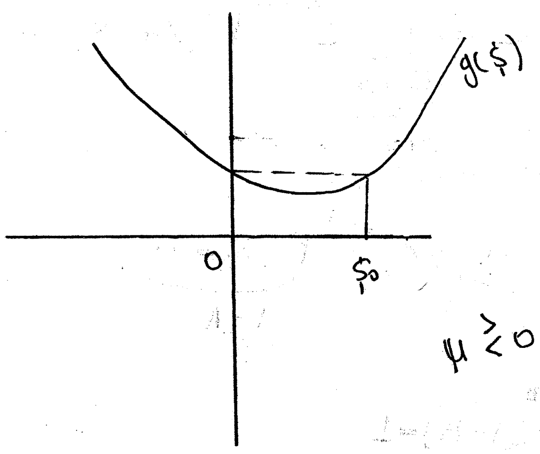
$$g(\xi) = E(e^{\xi Y})$$

$$g'(\xi) = E(\ e^{\xi Y}) \quad \text{με } g'(0) = EY = \mu \neq 0$$

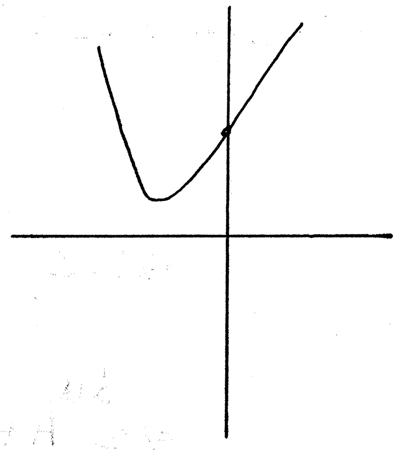
$$g''(\xi) = E(\underbrace{Y^2 e^{\xi Y}}_{>0}) > 0$$

Άρα $g(\xi)$ κυρτή, διότι 2η παράγωγος θετική και 1η παράγωγος μη-μηδενική
πάντα θετικοί όροι αφού είναι πιθανότητες

$$g(\xi) = E(e^{\xi Y}) = E(e^{\xi Y} \mid Y>0)\,P(X>0) + E(e^{\xi Y} \mid Y \leq 0)\,P(Y \leq 0)$$

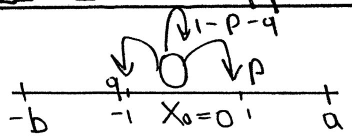


$\mu \gtrless 0$



(Δε θα τη χρειαστούμε αυτή την απόδειξη).

1η Ειδική Περίπτωση (Μετατοπίσεις 1ος βήματος)



$$P(Y_i=y)=\begin{cases} p & , y=1 \\ q & , y=-1 \\ 1-p-q & , y=0 \end{cases}$$

$$EY_i=\mu=\sum_{y=0,-1,1} P(Y=y)y = p\cdot 1+q(-1)+(1-p-q)\cdot 0=p-q.$$

$\mu\neq 0$ όταν $p\neq q$

Δυνατές τιμές της Y είναι $1,-1,0$

$$\sigma^2=\mathrm{Var}\,Y=EY^2-(EY)^2=p\cdot 1^2+q(-1)^2-(p-q)^2=p+q-(p-q)^2$$

$$g(\xi)=E(e^{\xi Y})=\sum_{y=1,-1,0} e^{\xi y}P(Y=y)=\underset{P(Y=1)}{p}\,e^{\xi}+\underset{P(Y=-1)}{q}\,e^{-\xi}+\underset{P(Y=0)}{(1-p-q)}\,e^{0}$$

Από την ταυτότητα του Wald έχω:

$$E\left[g(\xi)^{-T}e^{\xi X_T}\right]=1 \quad ,\forall \xi$$

Αναρωτιέμαι αν $\exists\, \xi_0\neq 0$ τ.ώ. $g(\xi_0)=1$

$$g(\xi)=1 \Rightarrow pe^{\xi_0}+qe^{-\xi_0}+1-p-q=1$$

$$\Rightarrow pe^{\xi_0}+qe^{-\xi_0}-(p+q)=0$$

$$\Rightarrow p(e^{\xi_0})^2+q-(p+q)e^{\xi_0}=0$$

Θέτω $e^{\xi_0}=\rho$

$$\Rightarrow p\rho^2-(p+q)\rho+q=0$$

$$\Delta=(p+q)^2-4pq=(p-q)^2$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm|p-q|}{2p}=\ldots\ldots=\begin{cases} 1 \\ \frac{q}{p}\end{cases}$$

$\lambda=e^{\xi_0}=1\Rightarrow\boxed{\xi_0=0}$ Απορρίπτεται γιατί ψάχνω κάποιο $\xi_0\neq 0$

$e^{\xi_0}=\frac{q}{p}\Rightarrow\boxed{\xi_0=\ln\frac{q}{p}}$ $\quad\ln\frac{q}{p}=0\Rightarrow\frac{q}{p}=1.$

► $\exists\,\xi_0\neq 0$ τ/ω $g(\xi_0)=1$ όταν:

Αν $p\neq q$ $\exists\,\xi_0=\ln\frac{q}{p}\neq 0$ τ/ώ $g(\xi_0)=1.$

Γι αυτό το ξ_0 εφαρμόζω την ταυτότητα του Wald:

$$E(e^{\xi_0 X_T})=1.$$

$$e^{\xi_0 a}P(X_T=a)+e^{-\xi_0 b}P(X_T=-b)=1$$

$$e^{\xi_0 a}\cdot A+e^{-\xi_0 b}(1-A)=1.$$

Άρα:

$$A=\frac{1-e^{-b\ln\frac{q}{p}}}{e^{a\ln\frac{q}{p}}-e^{-b\ln\frac{q}{p}}}=\frac{1-e^{b\ln\frac{p}{q}}}{e^{\ln(\frac{q}{p})^a}-e^{b\ln(\frac{p}{q})}}=\frac{1-(\frac{p}{q})^b}{(\frac{q}{p})^a-(\frac{p}{q})^b}$$

$$=\frac{\frac{q^b-p^b}{q^b}}{\frac{q^{a+b}-p^{a+b}}{p^a\cdot q^b}}=p^a\frac{q^b-p^b}{q^{a+b}-p^{a+b}}$$

$$A=p^a\frac{q^b-p^b}{q^{a+b}-p^{a+b}}$$

$$B=1-A=q^b\frac{p^a-q^a}{p^{a+b}-q^{a+b}},\ p\neq q$$

Όταν $p=q$

$$A=\frac{b}{a+b}\ ,\ B=\frac{a}{a+b}$$

Από Γενική Λύση

<u>2η Ειδική Περίπτωση</u> (Οι μετατοπίσεις εδώ μπορεί να είναι οποιουδήποτε βήματος)

$Y_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad EY_i=\mu \quad Var\,Y_i=\sigma^2 \quad g(\xi)=E(e^{\xi Y})=e^{\mu\xi+\sigma^2\frac{\xi^2}{2}},\ \xi\in\mathbb{R}.$

$\exists\, \xi_0\neq 0 \ \ g(\xi_0)=1\,;$

$\mu\neq 0$

$-b \qquad X_0=0 \qquad a$

$$X_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Πρέπει να λύσω : $g(\xi_0)=1 \Rightarrow e^{\mu\xi_0+\sigma^2\frac{\xi_0^2}{2}}=1 \Rightarrow \mu\xi_0+\sigma^2\frac{\xi_0^2}{2}=0 \Rightarrow \xi_0\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\xi_0\right)=0$

Άρα: $\underset{\text{Απορ.}}{\boxed{\xi_0=0}}$ ή $\xi_0\frac{\sigma^2}{2}=-\mu \Rightarrow \boxed{\xi_0=-\frac{2\mu}{\sigma^2}}$

Όταν $\mu\neq 0$ τότε $\exists\, \xi_0=\frac{-2\mu}{\sigma^2}$ τ/ώ $g(\xi_0)=1$ και

$$A=\frac{1-e^{-\xi_0 b}}{e^{\xi_0 a}-e^{-\xi_0 b}}$$

Αν $\mu=0$ τότε

$$A=\frac{b}{a+b}$$

19, 41, 45, 47, 48, 49, 50, 55 (Ασκήσεις λυμ. στο διαδίκτυο γι' αυτό το κεφ.)

Άσκηση 19

Παίκτης παίζει ένα τυχερό παιχνίδι με €10. Σε κάθε μονομαχία κερδίζει ή χάνει €1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Το παιχνίδι σταματά όταν έχει €15 ή €0. Να βρεθεί η πιθανότητα τα χρήματά του να γίνουν €0.

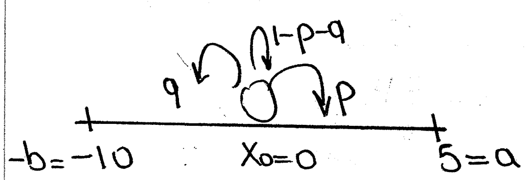
	p, βήμα δεξιά / q, βήμα αρ.	Πιθ.
Κερδίζει	1€ →	$1/2$
Χάνει	1€ →	$1/3$
Ισοπαλία	→	$1-1/2-1/3$

P(τα χρήματά του να γίνουν €0);

Λύση

$X_0=10$, $p=1$, $q=1$, το b δεν μπορεί να είναι 0, φράγματα 15, 0 , Κάνω μετατόπιση για να χρησιμοποιήσω την ταυτότητα Wald

Έστω X_n η στοχαστική διαδικασία που παριστά το κέρδος μετά το n-οστό παιχνίδι



$$X_0=0$$

$$X_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$P(Y_i=y)=\begin{cases} p & ,y=1 \\ q & ,y=-1 \\ 1-p-q & ,y=0 \end{cases} \quad \text{με } p=\frac{1}{2} \text{ και } q=\frac{1}{3}$$

$$EY_i=\dots=p-q=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\neq 0 \quad (\text{Άρα } p\neq q \Rightarrow \mu\neq 0.)$$

$$g(\theta)=pe^{\theta}+qe^{-\theta}+(1-p-q)$$

$$g(\theta_0)=1 \Rightarrow \theta_0=0 \text{ ή } \theta_0=\ln\frac{q}{p}=\ln\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\ln\frac{2}{3}\neq 0 \qquad \text{Άρα } \boxed{\theta_0=\ln\frac{2}{3}}$$

Πρέπει πρώτα νδο $P(\text{τελ.απορ.})=1$.

Άσκηση 41

Έστω ένας τυχαίος περίπατος που η θέση του τη n-οστή χρονική στιγμή περιγράφεται ως το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(Y_i=y)=\begin{cases} 1/4 & ,y=1 \\ 1/4 & ,y=2 \\ 1/2 & ,y=-2 \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $\exists$ 2 φρ. απορ. $\alpha, -b>0$ και αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση 0. Νδο υπολογιστεί ο μέσος χρόνος απορρόφησης και οι πιθ. απορ.

Υπόδειξη: Απλά να γραφεί ο τρόπος προσδιορισμού τους.

Λύση

Δε κάνει 1 βήμα δεξιά/αριστερά.

Κάνω Wald.

$$EY_i=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{2}(-2)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1=-\frac{1}{4}\neq 0.$$

Αφού $\mu\neq 0$ ξέρω ότι $\exists\, \theta_0\neq 0$ τ.ώ. $g(\theta_0)=1$ με $g(\theta)=E[e^{\theta Y}]$

1ο Βήμα

Νδο $P(\text{τελ.απορ.})=1$

2ο Βήμα

Να βρω την $g(\theta)=E[e^{\theta Y}]=\frac{1}{4}e^{\theta}+\frac{1}{4}e^{2\theta}+\frac{1}{2}e^{-2\theta}$

$$g(\theta_0)=1 \Rightarrow \frac{1}{4}e^{\theta_0}+\frac{1}{4}e^{2\theta_0}+\frac{1}{2}e^{-2\theta_0}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}e^{3\theta_0}+\frac{1}{4}e^{4\theta_0}+\frac{1}{2}-e^{2\theta_0}=0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\rho^3+\frac{1}{4}\rho^4+\frac{1}{2}-\rho^2=0$$ Δε θα τη λύνουμε, θέλει γενική λύση.

Μέσος χρόνος απορρόφησης

Στόχος ET;;;

$g(\vartheta)=E(e^{\vartheta Y})$ με $g'(0)=\mu$, $g(0)=E(e^{0Y})=1$

Παραγωγίζω την (1): $E[g(\vartheta)^{-T}e^{\vartheta X_T}]=1, \forall \vartheta$ ως προς ϑ.

$$E[-T\cdot g(\vartheta)^{-T-1}g'(\vartheta)e^{\vartheta X_T}+g(\vartheta)^{-T}e^{\vartheta X_T}X_T]=0, \forall \vartheta \quad (2)$$

$$\overset{\vartheta=0}{\Longrightarrow} E[-Tg(0)^{-T-1}g'(0)e^{0X_T}+g(0)^{-T}e^{0X_T}X_T]=0$$

$$\Rightarrow E[-T\cdot\mu+X_T]=0 \Rightarrow -\mu ET+EX_T=0 \Rightarrow \mu ET=EX_T$$

$$\Rightarrow \boxed{ET=\frac{EX_T}{\mu}, \mu\neq 0}$$

$$EX_T \overset{??}{=} \sum_{y=a,-b} P(X_T=y)y=a\cdot A-bB.$$

$\downarrow$
διακριτή
τ.μ με τιμές
$a,-b$

με $A=\dfrac{1-e^{-\vartheta_0 b}}{e^{\vartheta_0 a}-e^{-\vartheta_0 b}}, \vartheta_0\neq 0$ $\quad B=\dfrac{e^{\vartheta_0 a}-1}{e^{\vartheta_0 a}-e^{-\vartheta_0 b}}, \vartheta_0\neq 0$ (Πρώτα βρίσκουμε αυτά).

Όταν $\mu=0$ παραγωγίζω την (2):

$$\star\ E\Big(\underline{-T(-T-1)g(\vartheta)^{-T-2}(\cancel{g'(\vartheta)})^2e^{\vartheta X_T}}-Tg(\vartheta)^{-T-1}g''(\vartheta)e^{\vartheta X_T}\underline{-Tg(\vartheta)^{-T-1}\cancel{g'(\vartheta)}X_Te^{\vartheta X_T}}$$
$$\underline{-Tg(\vartheta)^{-T-1}\cancel{g'(\vartheta)}e^{\vartheta X_T}X_T}+g(\vartheta)^{-T}X_T^2e^{\vartheta X_T}\Big)=0.$$

Ξέρω ότι $g(0)=1$, $g'(0)=\mu=0$, $g''(\vartheta)=E(Y^2e^{\vartheta Y}) \Rightarrow g''(0)=EY^2=VarY+(EY)^2 \overset{\mu=EY}{=} VarY+0^2 =\sigma^2$

$$\star \text{Για } \vartheta_0=0: E(-T\sigma^2+X_T^2)=0 \Rightarrow \boxed{ET=\frac{EX_T^2}{\sigma^2}, \mu=0}$$

(να το μάθω απ' έξω, δε θέλει να ξέρω την απόδειξη)

$EX_T^2 = \sum_{y=a,-b} y^2 P(X_T=y) = a^2 P(X_T=a) + (-b)^2 P(X_T=-b) = a^2 A + b^2 B$ με

$A = \frac{b}{a+b}, \mu=0$ και $B = \frac{a}{a+b}, \mu=0.$ (Αποδεικνύω αυτόματα, αφού πρέπει αποδείξω τα A,B για $\mu \neq 0$).

Στην (41) $\mu \neq 0$ $ET = \frac{EX_T}{\mu}$

Άσκηση 45

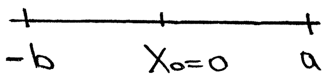
Έστω Τ.Π που η θέση του τη n-οστή στιγμή περιγράφεται ως: $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

$E(Y_i) = 7$

Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος απορρόφησης και οι πιθανότητες απορρόφησης.

Υπόδειξη: Λύστε τη γενική λύση του προβλήματος

Λύση



1ο Βήμα: P(τελ.απορ.) = 1

2ο Βήμα: $EY_i = \mu = 7 \neq 0 \Rightarrow \exists\, \xi_0 \neq 0$ τ.ώ $g(\xi_0) = 1$

3ο Βήμα: Απόδειξη των A,B όταν $\exists\, \xi_0 \neq 0$

Απόδειξη ότι $ET = \frac{EX_T}{\mu} = \frac{EX_T}{7}$

$EX_T = aA - bB$.

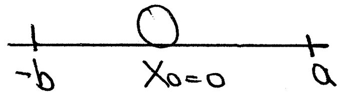
Άσκηση 47

Έστω Τ.Π που η θέση του τη n-οστή στιγμή περιγράφεται ως $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ και

$Y_i \sim N(10, 2^2)$, $\mu = EY_i = 10$, $\sigma^2 = Var Y_i = 4$. Έχουμε 2 φρ. απορ.

Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος απορ. και οι πιθ. απορ.

Λύση



1ο Βήμα: P(τελ. απορ.)=1

2ο Βήμα: $EY_i=\mu=10\neq 0 \Rightarrow \exists\, \xi_0\neq 0$ τ.ώ. $g(\xi_0)=1$

3ο Βήμα: $g(\xi_0)=e^{\mu\xi_0+\frac{\sigma^2}{2}\xi_0^2}$

Άρα $g(\xi_0)=1 \Rightarrow \xi_0=0$ ή $\xi_0=-\frac{2\mu}{\sigma^2}=\frac{-20}{4}=-5\neq 0$.

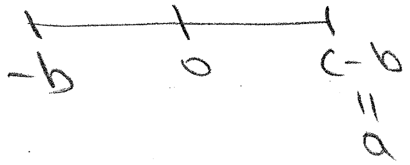
4ο Βήμα: Απόδειξη για $\mu\neq 0$ ($\exists\, \xi_0\neq 0$)

A,B

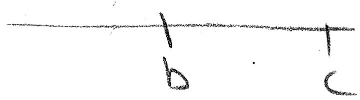
$$ET=\frac{EX_T}{\mu}=\frac{EX_T}{10}.$$

Κάνω απόδειξη του για ET κ' για EX_T.

(48) : όχι, αναπήδηση. Αν πάω με Wald δεν με επηρεάζει. Με ενδιαφέρει το κέρδος του (στοχαστική διαδ.)



Μετατόπιση | Πριν την μετατόπιση.



(i) P(τελ. απορ.) = 1.

(ii) P(τελ. απορ. στο a).

(iii) Μέση ~~χρόνο~~ τιμή απορ. $\Rightarrow$ ET,

(iv) Τ.Π. με ένα φράγμα απορ. γιατί $b\to\infty$

P(τελ. απορ. στο a με 1 φρ. απορ.).

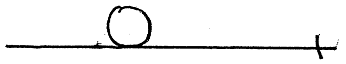
(49) όχι $L_0(\sigma)$.

(50) too easy.

(55) " "

30/10/14
Πέμπτη

Απλός Τυχαίος Περίπατος με 1 Φράγμα Απορρόφησης



$X_0=0$ $\quad$ a: φράγμα απορρόφησης

$$P(\text{απορ. στο } a) = \lim_{b\to\infty} P\begin{pmatrix}\text{απορ. στο } a \text{ ενώ} \\ \text{έχω 2 φρ. απορ.}\end{pmatrix}$$

• $\mu \neq 0 \ (p \neq q)$

$$P(\text{απορ. στο } a) = \lim_{b\to\infty} P\begin{pmatrix}\text{απορ. στο } a \text{ ενώ} \\ \text{έχω 2 φρ. απορ.}\end{pmatrix}$$

$$= \lim_{b\to\infty} p^a \frac{q^b - p^b}{q^{a+b} - p^{a+b}}$$

$$= p^a \lim_{b\to\infty} \frac{q^b\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^b\right)}{q^{a+b}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}\right)}$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^a \lim_{b\to\infty} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^b}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

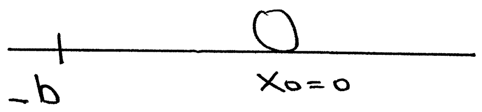
$$= \begin{cases} \underline{\underline{\left(\frac{p}{q}\right)^a}} & p<q \\ \left(\frac{p}{q}\right)^a \dfrac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^a} = \underline{\underline{1}} & p>q \end{cases}$$

• $\mu = 0 \ (p=q)$

$$P(\text{απορ. στο } a) = \lim_{b\to\infty} P\begin{pmatrix}\text{απορ. στο } a \text{ ενώ} \\ \text{έχω 2 φρ. απορ.}\end{pmatrix} = \lim_{b\to\infty} \frac{b}{a+b} = 1$$

Τελικά, $P(\text{απορ. στο } a) = \begin{cases} \left(\frac{1}{q}\right) & , p<q \\ 1 & , p \geq q \end{cases}$

<u>Αντίστοιχα</u>



$$P(\text{απορ. στο } -b) = \lim_{a\to\infty} P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } -b \text{ ενώ} \\ \text{έχω 2 φρ. απορ.}\end{matrix}\right)$$

• $\mu \neq 0 \ (p \neq q)$

$$P(\text{απορ. στο } -b) = \lim_{a\to\infty} P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } -b \text{ ενώ} \\ \text{έχω 2 φρ. απορ.}\end{matrix}\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} q^b \frac{p^a - q^a}{p^{a+b} - q^{a+b}}$$

$$= \lim_{a\to\infty} q^b \frac{p^a\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^a\right)}{p^{a+b}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right)}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^b \lim_{a\to\infty} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

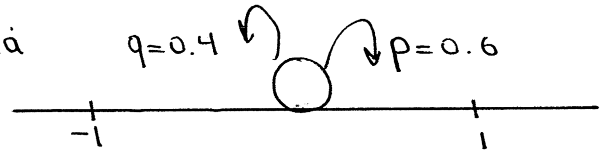
$$= \begin{cases} 1 & p<q \\ \left(\frac{q}{p}\right)^b & p>q \end{cases}$$

• $\mu = 0 \ (p=q)$: $\lim_{a\to\infty} \frac{a}{a+b} = 1$

Τελικά, $P(\text{απορ. στο } -b) = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^b & , q<p \\ 1 & , q \geq p \end{cases}$

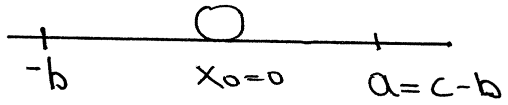
Άσκηση 48

Γενικά εδώ



Δεν έχω αναπτήδηση.

Για τη σ.δ



X_n: η σ.δ που περιγράφει το κέρδος του μετά το n-οστό παιχνίδι.

<u>Σημείωση</u> Παράλληλα θα δουλεύουμε και την Άσκηση 49 γιατί είναι το ίδιο πράγμα, με μόνη διαφορά ότι: $a=12$, $-b=8$.

(α) Θδο P(να τελειώσει το παιχνίδι)$=1$

Αρκεί νδο P(τελ. απορ.)$=1$ (βλέπε θεωρία).

(β) $P\left(\begin{matrix}\text{Το κέρδος να γίνει } a \text{ κ'}\\ \text{να τελειώσει το παιχνίδι έτσι}\end{matrix}\right) = P$(τελ. απορ. στο a)

Y_i: η τ.μ που παριστάνει την i-οστή μετατόπιση

$$P(Y_i=y)=\begin{cases} p=0.6 & ,y=1 \\ q=0.4 & ,y=-1 \end{cases}$$

$$EY_i=\mu=1\cdot p+(-1)q=p-q=0.6-0.4=0.2\neq 0$$

$$g(\theta)=E(e^{\theta Y})=e^{\theta\cdot 1}\cdot p+qe^{\theta(-1)}=pe^{\theta}+qe^{-\theta}$$: ροπογεννήτρια

$$\mu\neq 0 \Rightarrow \exists\, \theta_0\neq 0 : g(\theta_0)=1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \theta_0=0 \text{ ή } \theta_0=\ln\frac{q}{p}.$$

Ταυτότητα Wald: $E\left[g(\theta)^{-T}\cdot e^{\theta X_T}\right]=1, \forall \theta$

Εφαρμόζω για $\theta_0=\ln\frac{q}{p}$ και $g(\theta_0)=1$ και καταλήγω:

$$P(\text{τελ. απορ. στο } a) = p^a\,\frac{q^b-p^b}{q^{a+b}-p^{a+b}}$$

(γ) $\mu \neq 0$

$$ET = \frac{EX_T}{\mu} = \frac{aP(\text{απορ. στο } a) - bP(\text{τελ. απορ. στο } -b)}{p-q}$$

(αποδεικνύω τον τύπο κανονικά)

(δ) $P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } a \text{ με } 1 \\ \text{φρ. απορ. }, p\neq q\end{matrix}\right) = 1$

$$P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } -b \text{ με } 1 \\ \text{φρ. απορ. }, p\neq q\end{matrix}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^b$$

Το λύνουμε όπως τη γενική άσκηση 2.7.1

(ε) $P(\text{κέρδος } 0 \text{ σε οποιαδήποτε μελλοντική στιγμή}) = P(\text{επιστροφής στο } 0)$

$$= P\left(\begin{matrix}\text{να κερδίσει το } 1^{\text{ο}} \text{ παιχνίδι και να επιστρέψει στο } 0 \ (A_1) \\ \text{ή να χάσει το } 1^{\text{ο}} \text{ παιχνίδι και να επιστρέψει στο } 0 \ (A_2) \\ \text{ή ούτε να χάσει ούτε να κερδίσει στο } 1^{\text{ο}} \text{ παιχνίδι } (A_3)\end{matrix}\right)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$= p\,P\left(\begin{matrix}\text{να επιστρέψει στο } 0 \\ \text{ενώ βρίσκεται στο } 1\end{matrix}\right) + q\,P\left(\begin{matrix}\text{να επιστρέψει στο } 0 \\ \text{ενώ βρίσκεται στο } -1\end{matrix}\right) + \cancel{(1-p-q)}$$

0 (αλλά θα το δουλέψουμε γενικά)

$$= p\,P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } 0 \\ \text{ενώ } X_0=1\end{matrix}\right) + q\,P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } 0 \\ \text{ενώ } X_0=-1\end{matrix}\right) + (1-p-q)$$

$$= p\,P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } -1 \\ \text{ενώ } X_0=0\end{matrix}\right) + q\,P\left(\begin{matrix}\text{απορ. στο } 1 \\ \text{ενώ } X_0=0\end{matrix}\right) + (1-p-q)$$

$$= \begin{cases} p\cdot 1 + q\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^1 + (1-p-q), & p<q \\ p\left(\frac{q}{p}\right)^1 + q\cdot 1 + (1-p-q), & p>q \\ p\cdot 1 + q\cdot 1 + (1-p-q), & p=q \end{cases}$$

Άσκηση 50 (Θέμα Φεβρουαρίου 2014)

Ίδια με την Άσκηση 47

X_n: η σ.δ που περιγράφει το κέρδος, $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

$Y_i \sim N(10, 2^2)$

$-10 = -b \qquad X_0 = 0 \qquad a = 100$

$$\left.\begin{array}{l} \mu = 10 \neq 0 \Rightarrow \exists\, \xi_0 \neq 0 : g(\xi_0) = 1 \\ g(\xi) = e^{\mu\xi + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2} \text{ : ροπογεννήτρια} \end{array}\right\} \Rightarrow \xi_0' = 0 \text{ ή } \xi_0 = \frac{-2\mu}{\sigma^2} \xrightarrow{\xi_0 \neq 0} \xi_0' = \frac{-2\mu}{\sigma^2} \Rightarrow \boxed{\xi_0 = -5}$$

Θ. Wald και δείχνω ότι: $P(\text{απορ. στο } a) = \dfrac{1 - e^{-\xi_0 b}}{e^{\xi_0 a} - e^{-\xi_0 b}}$, $P(\text{απορ. στο } -b) = \dfrac{e^{\xi_0 a} - 1}{e^{\xi_0' a} - e^{-\xi_0 b}}$

(<u>Δε</u> χρειάζεται να κάνω τις αντικαταστάσεις, αρκεί να γράψω ότι $\xi_0 = ..,\ a = ..,\ b = ..$)

Άσκηση 55

(α) Έστω X_n η σ.δ που περιγράφει το "κέρδος" της Κατερίνας

(i) $P\left(\begin{array}{l}\text{η Κατερίνα μετά από 10 παιχνίδια} \\ \text{να έχει κερδίσει 4 φορές παραπάνω}\end{array}\right) = P(X_{10} = 4) = \binom{10}{7} p^7 q^3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\qquad P\left(\begin{array}{l}\text{η Κατερίνα να έχει} \\ \text{7 επιτυχίες στα 10 παιχνίδια}\end{array}\right)$

(ii) $P\left(\begin{array}{l}\text{η Κατερίνα να έχει κερδίσει} \\ \text{από 8 ως 32 φορές παραπάνω}\end{array}\right) = P(54 \leq \text{νίκες Κατερίνας} \leq 66)$, διότι:

$$\begin{array}{l} n_1 + n_2 = 100 \\ n_1 - n_2 = 8 \\ \hline n_1 = 54 \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{l} n_1 + n_2 = 100 \\ n_1 - n_2 = 32 \\ \hline n_1 = 66 \end{array}$$

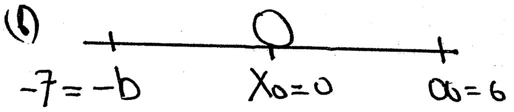
και τότε

$$P(54 \leq \text{νίκες Κατερίνας} \leq 66) = \sum_{k=54}^{66} \binom{100}{k} p^k q^{100-k}$$

Εναλλακτικά,

$$P(54 \leq \text{νίκες Κατερίνας} \leq 66) = P(53.5 \leq \text{νίκες Κατερίνας} \leq 66.5)$$

$$= P\left(\frac{53.5-np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{66.5-np}{\sqrt{npq}}\right) \underset{\text{προσ.}}{\approx} \Phi\left(\frac{66.5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{53.5-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

(β) 

Δείχνω τους τύπους για $\mu \neq 0$

(γ) $b \to \infty$: P(απορ. στο a)

$a \to \infty$: P(απορ. στο $-b$)

Άσκηση 2.5.2

Στην περίπτωση του τ.π με 1 φράγμα απορρόφησης να βρεθεί όταν η απορρόφηση του είναι σίγουρη η μέση τιμή της διάρκειας του.

Η απορρόφηση του είναι σίγουρη όταν $p \geq q$

Αφού P(απορ. στο a, όταν a μοναδικό φράγμα απορ.) $= \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right)^a, & p<q \\ 1, & p \geq q \end{cases}$

$p \geq q$

X_n : η σ.δ που περιγράφει τη θέση της τη n-οστή χρονική στιγμή

Έστω N_a η τ.μ που παριστάνει τη διάρκεια του τυχαίου περιπάτου μέχρι την απορρόφηση στο a.

$$E(\text{διάρκειας}) = EN_a \xrightarrow[\text{Δυνατές τιμές: } 0,1,2]{N_a:\text{ διακριτή τ.μ}} \sum_{n=0}^{\infty} P(N_a = n) \cdot n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = a, X_i < a, i<n \mid X_0 = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot f_{0a}^{(n)}$$

↳ Το 0 δεν παίζει ρόλο

$$F_a(\xi)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_a^{(n)}\xi^n=\frac{1}{\lambda_1^{a}(\xi)}$$

Παραγωγίζω (διότι θέλω να κατεβάσω κάτω το n και ύστερα να εξαφανίσω το ξ)

$$\frac{dF_a(\xi)}{d\xi}=\sum_{n=1}^{\infty} n f_a^{(n)}\xi^{n-1}$$

$$\left.\frac{dF_a(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=1}=\sum n f_a^{(n)}$$

$$\operatorname{Var}N_a=EN_a^2-(EN_a)^2 \quad , \quad EN_a^2=\sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_a^{(n)}$$

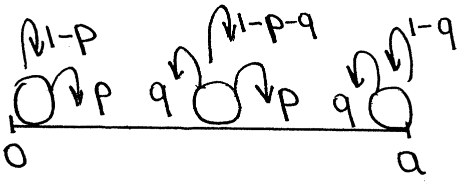
Παραγωγίζω ξανά

$$\frac{d^2F_a(\xi)}{d\xi^2}=\sum n(n-1) f_a^{(n)}\xi^{n-2}=\sum n^2 f_a^{(n)}\xi^{n-2}-\sum n f_a^{(n)}\xi^{n-2}$$

$$F''(\xi)\Big|_{\xi=1}=EN_a^2-EN_a=E(N_a^2-N_a)$$

[Πρώτα βρίσκω το $\lambda_1(\xi)$ και μετά για $\xi=1$ βρίσκω το $\lambda_1(1)$].

Τυχαίος Περίπατος με 2 Φράγματα Ανάκλασης



Χώρος Καταστάσεων: $S=\{0,1,2,..,a\}$

X_n: η σ.δ. που περιγράφει τη θέση του σωματιδίου τη n-οστή χρονική στιγμή.

Θεώρημα Όταν το πλήθος των καταστάσεων μιας σ.δ είναι πεπερασμένο τότε υπάρχουν οι οριακές πιθανότητες (αλλιώς πιθανότητες στην στατιστική ισορροπία):

$$\Pi_k = \lim_{n\to\infty} P_{jk}^{(n)}, \text{ όπου } P_{jk}^{(n)} = P(X_n = k \mid X_0 = j),\ k \in \{0, 1, \ldots, a\}$$

$$P_{j0}^{(n)} = P\left(\begin{array}{l}\text{να είμαι την } n\text{-1 χρ. στιγμή στη θέση } 0 \\ \text{και εκεί να παραμείνω } \underline{\text{ή}} \text{ να είμαι} \\ \text{τη } n\text{-1 χρ. στιγμή στη θέση } 1 \text{ και να} \\ \text{πάω στο } 0\end{array}\right)$$

$$= P(X_{n-1} = 0 \mid X_0 = j)\cdot(1-p) + P(X_{n-1} = 1 \mid X_0 = j)\cdot q$$

$$= P_{j0}^{(n-1)}(1-p) + P_{j1}^{(n-1)}\cdot q$$

$$\left\{\begin{array}{l}
P_{j1}^{(n)} = P_{j1}^{(n-1)}(1-p-q) + P_{j2}^{(n-2)}\cdot q + P_{j0}^{(n-1)}\cdot p \\
P_{j2}^{(n)} = P_{j2}^{(n-1)}\cdot(1-p-q) + P_{j3}^{(n-1)}\cdot q + P_{j1}^{(n-1)}\cdot p \\
\vdots \\
P_{ja-1}^{(n)} = P_{ja-1}^{(n-1)}\cdot(1-p-q) + P_{ja}^{(n-1)}\cdot q + P_{ja-2}^{(n-1)}\cdot p \\
P_{ja}^{(n)} = P_{ja}^{(n-1)}(1-q) + P_{ja-1}^{(n)}\cdot q
\end{array}\right.$$

Παίρνω όρια και $\lim P_{ji}^{(n)} = \Pi_i$ και έχω:

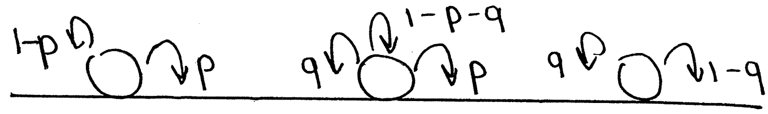
$$\left\{\begin{array}{l}
\Pi_0 = \Pi_0(1-p) + \Pi_1 q \\
\Pi_1 = \Pi_1(1-p-q) + \Pi_2 q + \Pi_0 p \\
\Pi_2 = \Pi_2(1-p-q) + \Pi_3 q + \Pi_1 p \\
\vdots \\
\Pi_{a-1} = \Pi_{a-1}(1-p-q) + \Pi_a q + \Pi_{a-2}\cdot p \\
\Pi_a = \Pi_a(1-q) + \Pi_{a-1} p
\end{array}\right.$$

Αν το σύνδεα με το 1ο βήμα θα κατέληγα στο $\Pi_0 = \Pi_0$. Γι' αυτό το συνδέω με τη $(n-1)$ χρ. στ.

06/11/1·
Πέμπτη

X_n η σ.δ που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad , \quad S = \{0, .., a\}$$



Ορίσαμε $P_{ij}^{(n)} = P(X_n = K \mid X_0 = i)$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \Pi_{ij}$$

Είχαμε φτάσει στο σύστημα:

$$\Pi_0 = (1-p)\Pi_0 + q\Pi_1$$

$$\Pi_1 = p\Pi_0 + q\Pi_2 + (1-p-q)\Pi_1$$

$$\Pi_2 = p\Pi_1 + q\Pi_3 + (1-p-q)\Pi_1$$

$$\vdots$$

$$\Pi_{a-1} = p\Pi_{a-2} + q\Pi_a + (1-p-q)\Pi_{a-1}$$

$$\Pi_a = p\Pi_{a-1} + (1-q)\Pi_a$$

1η Μεθοδολογία

$$\Pi_0 = (1-p)\Pi_0 + q\Pi_1 \Rightarrow \Pi_0[1-1+p] = q\Pi_1 \Rightarrow \Pi_0 p = q\Pi_1 \Rightarrow \boxed{\Pi_1 = \frac{p}{q}\Pi_0}$$

$$\Pi_1 = p\Pi_0 + q\Pi_2 + (1-p-q)\Pi_1 \xrightarrow{\Pi_0 = \frac{q}{p}\Pi_1} \ldots \Rightarrow \Pi_1 p = q\Pi_2 \Rightarrow \Pi_2 = \frac{p}{q}\Pi_1 \Rightarrow \boxed{\Pi_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Pi_0}$$

$$\Pi_2 = p\Pi_1 + q\Pi_3 + (1-p-q)\Pi_2 \Rightarrow \Pi_2 = \cancel{p}\cdot\frac{q}{\cancel{p}}\Pi_2 + q\Pi_3 + (1-p-q)\Pi_2 \Rightarrow \Pi_2(1-q-1+p+q) = q\Pi_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_2 p = q\Pi_3} \Rightarrow \Pi_3 = \frac{p}{q}\Pi_2 = \boxed{\left(\frac{p}{q}\right)^3 \Pi_0 = \Pi_3}$$

Η σχέση που ισχύει είναι: $\boxed{\Pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \Pi_0}$, $i = 0, 1, .., a$

$$\sum_{i=0}^{a} \Pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{a} \left(\frac{p}{q}\right)^i \Pi_0 = 1 \Rightarrow \Pi_0 \sum_{i=0}^{a} \left(\frac{p}{q}\right)^i = 1 \Rightarrow \Pi_0 \Bigg(\underbrace{\left(\frac{p}{q}\right)^0 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p}{q}\right)^a}_{\text{Άθροισμα Γεωμετρικής Προόδου}}\Bigg) = 1$$

$$\xRightarrow{\frac{p}{q} \neq 1} \Pi_0 \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{a+1} - 1}{\frac{p}{q} - 1} = 1 \xRightarrow{p \neq q} \Pi_0 = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+1}}$$

Άρα $\boxed{\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+1}}}$

- Αν $\frac{p}{q}=1 \Rightarrow \boxed{p=q}$

Τότε $\pi_i=\pi_0$

$$\sum_{i=0}^{a}\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 \sum_{i=0}^{a} = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{1}{a+1}}$$

$$\boxed{\pi_i=\left(\frac{p}{q}\right)^i \frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+1}}}, i=0,1,\dots,a \quad \text{όταν } p\neq q$$

$$\boxed{\pi_i=\frac{1}{a+1}}, i=0,1,\dots,a \quad \text{όταν } p=q$$

2η Μεθοδολογία

Ορίζω την πιθανογεννήτρια: $\pi(x)=\sum_{i=0}^{a} x^i \pi_i \quad , |x|\leq 1$

$$\pi(x)=x^0\pi_0+x\pi_1+x^2\pi_2+\dots+x^{a-1}\pi_{a-1}+x^a\pi_a$$

$$\begin{array}{ll} x^0 & \pi_0=(1-p)\pi_0+q\pi_1 \\ x^1 & \pi_1=p\pi_0+q\pi_2+(1-p-q)\pi_1 \\ & \vdots \\ x^{a-1} & \pi_{a-1}=p\pi_{a-2}+q\pi_a+(1-p-q)\pi_{a-1} \\ x^a & \pi_a=p\pi_{a-1}+(1-q)\pi_a \end{array} \quad +$$

$$\Rightarrow \Pi(x) = (1-p)\Pi_0 + q\Pi_1 + qx^1\Pi_2 + qx^2\Pi_3 + \dots + qx^{a-1}\Pi_a$$

$$+ px^1\Pi_0 + px^2\Pi_1 + \dots + px^{a-1}\Pi_{a-2} + px^a\Pi_{a-1}$$

$$+ (1-p-q)x^1\Pi_1 + (1-p-q)x^2\Pi_2 + \dots + (1-p-q)x^{a-1}\Pi_{a-1}$$

$$+ \{(1-q)x^a\Pi_a\}$$

$$\Rightarrow \Pi(x) = \Pi_0 - p\Pi_0 + \frac{q}{x}(x\Pi_1 + x^2\Pi_2 + x^3\Pi_3 + \dots + x^a\Pi_a) + [(1-p-q)(x^1\Pi_1 + \dots + x^{a-1}\Pi_{a-1})$$

$$+ px(\Pi_0 + x\Pi_1 + \dots + x^{a-1}\Pi_{a-1}) + \{(1-q)x^a\Pi_a\}$$

$$\Rightarrow \Pi(x) = \Pi_0 - p\Pi_0 + \frac{q}{x}[\Pi(x) - \Pi_0] + (1-p-q)[\Pi(x) - \Pi_0 - x^a\Pi_a]$$

$$+ px[\Pi(x) - x^a\Pi_a] + (1-q)x^a\Pi_a$$

$$\Rightarrow \Pi(x) = \cancel{\Pi_0} - \cancel{p\Pi_0} + \frac{q}{x}\Pi(x) - \frac{q}{x}\Pi_0 + \Pi(x) - \cancel{\Pi_0} - \cancel{x^a\Pi_a} - p\Pi(x) + \cancel{p\Pi_0}$$

$$+ px^a\Pi_a - q\Pi(x) + q\Pi_0 + \cancel{qx^a\Pi_a} + px\Pi(x) - px^{a-1}\Pi_a$$

$$+ \cancel{x^a\Pi_a} - \cancel{qx^a\Pi_a}$$

$$\Rightarrow p\Pi(x) - \frac{q}{x}\Pi(x) + q\Pi(x) - px\Pi(x) = -\frac{q}{x}\Pi_0 + q\Pi_0 + px^a\Pi_a - px^{a+1}\Pi_a$$

$$\Rightarrow (p+q)\Pi(x) - \frac{q}{x}\Pi(x) - px\Pi(x) = \Pi_0 q - \frac{q}{x}\Pi_0 + px^a\Pi_a - px^{a+1}\Pi_a$$

$$\Rightarrow (p+q)x\Pi(x) - q\Pi(x) - px^2\Pi(x) = \Pi_0 qx - q\Pi_0 + px^{a+1}\Pi_a - px^{a+1}\Pi_a$$

$$\Rightarrow -\Pi(x)[px^2 - (p+q)x + q] = \Pi_0 q(x-1) + px^{a+1}\Pi_a(1-x)$$

$$\Rightarrow \Pi(x)[px^2 - (p+q)x + q] = (x-1)(px^{a+1}\Pi_a - \Pi_0 q)$$

$$\Rightarrow \Pi(x) = \frac{(p x^{a+1} \Pi_a - \Pi_0 q)(x-1)}{p x^2 - (p+q)x + q}$$

[Μπορώ να διαιρέσω γιατί Δ>0 και οι ρίζες του παρονομαστή είναι ~~και~~ ρίζες του αριθμητή]

Βρίσκω τις ρίζες του παρονομαστή:

$$p x^2 - (p+q)x + q = 0$$

$$\Delta = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{(p+q) \pm (p-q)}{2p} \quad \boxed{x_1 = 1} \quad \boxed{x_2 = \frac{q}{p}}$$

$$\Pi(x) = \frac{(p x^{a+1} \Pi_a - q\Pi_0)\cancel{(x-1)}}{p\cancel{(x-1)}(x - \frac{q}{p})}$$

Άρα πρέπει το $\frac{q}{p}$ να είναι ρίζα του αριθμητή. Επομένως:

$$p\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} \Pi_a - q\Pi_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{q^{a+1}}{p^a} \Pi_a = q\Pi_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Pi_a = \left(\frac{p}{q}\right)^a \Pi_0}$$

Άρα:

$$\Pi(x) = \frac{p x^{a+1} \frac{p^a}{q^a} \Pi_0 - q\Pi_0}{p(x - \frac{q}{p})} = \frac{\left(\frac{p^{a+1}}{q^a} x^{a+1} - q\right)\Pi_0}{px - q}$$

$$= \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{a+1} x^{a+1} - 1}{\frac{p}{q}x - 1} \Pi_0$$

Τελικά $$\boxed{\Pi(x)=\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{a+1}x^{a+1}-1}{\frac{p}{q}x-1}\cdot\Pi_0}$$

$$\Pi(x)=\sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}x\right)^{i}\Pi_0=\sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}\right)^{i}\Pi_0\,x^{i}$$

$$\Pi(x)=\sum_{i=0}^{a}\Pi_i x^{i}$$

Επομένως, $\boxed{\Pi_i=\left(\frac{p}{q}\right)^{i}\Pi_0}$

$$\sum_{i=0}^{a}\Pi_i=1\Rightarrow\sum_{i=0}^{a}\left(\frac{p}{q}\right)^{i}\Pi_0=1$$ (Από 'δω και κάτω ίδιο με προηγουμένως).

Αν $p\neq q$

Αν $p=q$

Πιθανογεννήτριες (ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ)

Έστω X μια τυχαία διακριτή μεταβλητή με τιμές μη-αρνητικές

$$\Pi(\varsigma)=\sum_{x}\varsigma^{x}P(X=x)=E(\varsigma^{x})$$ ← μέση τιμή

Παραγωγίζοντας τη γεννήτρια βρίσκω τη μέση τιμή για $\varsigma=1$.

$$\frac{d\Pi}{d\varsigma}(\varsigma)=\frac{d}{d\varsigma}E(\varsigma^{x})=E(X\varsigma^{x-1})$$

$$\left.\frac{d\Pi(\varsigma)}{d\varsigma}\right|_{\varsigma=1}=EX$$

$$\frac{d^{2}\Pi(\varsigma)}{d\varsigma^{2}}=E(X(x-1)\varsigma^{x-2})$$

$$\left.\frac{d^2\Pi(\varsigma)}{d\varsigma^2}\right|_{\varsigma=1} = E(x(x-1)) = EX^2 - EX \Rightarrow Ex^2 = \left.\frac{d^2\Pi(\varsigma)}{d\varsigma^2}\right|_{\varsigma=1} + \left.\frac{d\Pi(\varsigma)}{d\varsigma}\right|_{\varsigma=1}$$

Αρα μπορώ να βρω και τη διακύμανση αφού $VarX = EX^2 - (EX)^2$.

$p \neq q$ νοτΟ

$$\Pi(\varsigma) = \sum \varsigma^x P(X=x)$$

$$= P(X=0) + P(X=1)\varsigma + P(X=2)\varsigma^2 + P(X=3)\varsigma^3 + \dots$$

$P(X=1)$; Αν έχω το $\Pi(\varsigma)$, βρίσκοντας το ς', η $P(X=1)$ είναι ο συντελεστής του ς'.

Γενικά $P(X=k)$ είναι ο συντελεστής του ς^k.

<u>2ος Τρόπος</u>

$$\Pi(0) = P(X=0)$$

$$\Pi'(\varsigma) = P(X=1) + 2P(X=2)\varsigma + 3P(X=3)\varsigma^2 + \dots$$

$$\left.\frac{d\Pi(\varsigma)}{d\varsigma}\right|_{\varsigma=0} = \Pi'(0) = P(X=1)$$

$$\Pi''(\varsigma) = 2P(X=2) + 6P(X=3)\varsigma$$

$$P(X=2) = \frac{\Pi''(0)}{2!}$$

$$P(X=3) = \frac{\Pi'''(0)}{3!}$$

$$P(X=k) = \frac{\Pi^{(k)}(0)}{k!}$$

SOS

! Αρα έχοντας την πιθανογεννήτρια (1) Έχω τις πιθανότητες

(2) Έχω μέση τιμή και διακύμανση

Ροπογεννήτρια

$M_X(s) = E(e^{sx})$

$\Pi(s) = E(s'^{x})$: πιθανογεννήτρια

$s' = e^{s}$; $e^{s} = s'$;

Πώς πάω από τη μία στην άλλη;
Ξέροντας τη μία βρίσκω κ' την άλλη.

$$M'(s)\Big|_{s=0} = E(x e^{sx})\Big|_{s=0} = EX$$

$$M''(s)\Big|_{s=0} = E(x^2 e^{sx})\Big|_{s=0} = EX^2$$

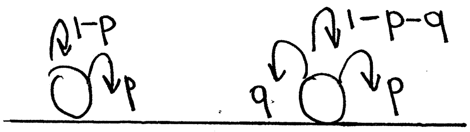
$$M'''(s) = EX^3$$

Αν $p \neq q$ $\quad \Pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \dfrac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+1}}$ $\qquad \Pi(x) = \sum_{i=0}^{a} \Pi_i x^i$

Πρέπει να τους αποδεικνύουμε

Αν $p = q$ $\quad \Pi_i = \dfrac{1}{a+1}$ $\qquad \Pi(x) = \sum_{i=0}^{a} \dfrac{1}{a+1} x^i$

Ένα φράγμα ανάκλασης



(Στο 0)

Όταν $p=q$ τότε $\Pi_k = 0, \forall k$ (οριακές πιθανότητες)

Όταν $p \neq q$

- $p<q$: $\Pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \left(1-\frac{p}{q}\right), \forall i$
- $p>q$: $\Pi_k \nexists$

Όταν $S=\{1,\ldots\}$ πεπ/νο πλήθος τότε $\exists$ οι οριακές πιθανότητες $S=\{0,..,a\}$.

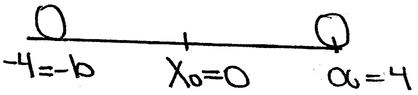
Ασκήσεις

① Παίχτες Α, Β ρίχνουν 2 ζάρια. Αν το άθροισμα των ζαριών είναι μικρότερο από 5 τότε Α: κερδίζει 1€. Αν άθροισμα μεγαλύτερο του 9, Β: κερδίζει 1€. Οι παίχτες ξεκινούν με 4€ και το παιχνίδι τελειώνει όταν κάποιος μείνει χωρίς χρήματα.

Νδο:
1. Το παιχνίδι θα τελειώσει σίγουρα (P(να τελειώσει σίγουρα))
2. Ποια η πιθανότητα ο Α να είναι νικητής (P(A τελικός νικητής))
3. Ποιος είναι ο μέσος χρόνος διάρκειας του παιχνιδιού
4. Αν Y_n είναι το κέρδος του παίχτη Α ποια είναι η πιθανότητα το κέρδος του να είναι μηδέν κάποια χρονική στιγμή

Λύση

Έστω Y_n η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει το κέρδος του Α παίχτη μετά τη n-οστή ρίψη των 2 ζαριών.



, a, $-b$ φράγματα απορρόφησης.

Έστω Z_i: μετατόπιση στο i-οστο παιχνίδι

$$P(Z_i=z)=\begin{cases} \frac{6}{36}=\frac{1}{6}, & z=1 \\ 1/6, & z=-1 \\ 4/6, & z=0 \end{cases}$$

Ζαριές μικρότερες του 5: (1,1) (1,2) (2,1) (1,3) (3,1) (2,2), 6 περιπτώσεις

μεγαλύτερες 9: (4,6) (6,4) (5,6) (6,5) (5,5) (6,6), " - " " - "

Επομένως είμαι στον απλό τυχαίο περίπατο με 2 φράγματα απορρόφησης με $\frac{1}{6}=p=q=\frac{1}{6}$.

Αρκεί νδο 1. P(τελ. απορ.) = 1, 2. P(τελ. απορ στο a), 3. $ET=\frac{EX_T^2}{\sigma^2}$, $\mu=p-q=0$ χρονο βαρ. $\boxed{\text{Θ. wald}}$ ή γενική

4. P(επιστροφής στο 0)

Παίρνω την περίπτωση ΜΟΝΟ $p=q$.

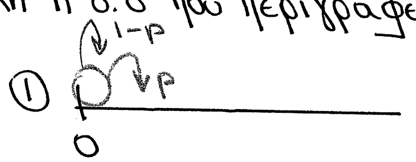
(2) Σε ένα μοναδικό ταμείο ενός κινηματογράφου πελάτες καταφθάνουν για εισιτήριο. Θεωρούμε διακριτές χρονικές στιγμές, έστω $n=0,1,2,3..$ και ας υποθέσουμε ότι σε κάθε χρονική στιγμή $\exists$ πιθανότητα p: να έρθει νέος πελάτης και q: να φύγει από το ταμείο πελάτης (φεύγουν όσοι έβγαλαν ήδη εισιτήριο). Έχουμε απεριόριστη ουρά. Επιπλέον, αποκλείουμε σύγχρονες αφίξεις. Θέλουμε να βρούμε στην περίπτωση στατιστικής ισορροπίας, ποια η πιθανότητα να υπάρχουν k πελάτες.

(3) Η χωρητικότητα της ουράς είναι a θέσεων. Στην αρχή δεν υπάρχει κανείς στην ουρά (και στο (2) αυτό).

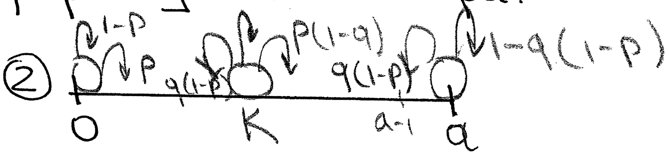
Όταν το σύστημα έχει K πελάτες, η πιθανότητα για να φύγω είναι 0.

Λύση (2),(3) ταυτόχρονα

X_n η σ.δ. που περιγράφει τον αριθμό πελατών στην ουρά:

(1) 

Τυχαίος περίπατος με 1 φράγμα ανάκλασης

(2) 

Τυχαίος περίπατος με 2 φράγματα ανάκλασης

(στέλνοντας το $a\to\infty$ πάμε στο (1))

Αν έλεγε ότι σε κάθε χρονική στιγμή μπορεί να γίνει μόνο 1 γεγονός θα είχα μόνο (q)

$P(a\to a-1)=P($να φύγει και να μην έρθει άλλος$)$ (ανεξάρτητα μεταξύ τους)

$=q(1-p)$

$P(K\to K+1)=P($να έρθει ένας κ' να μη φύγει άλλος$)$

$=p(1-q)$

$$P(K \to K-1) = q(1-p)$$

$$P(K \to K) = 1 - p(1-q) - q(1-p)$$

Να γράψετε το σύστημα που θα σας δώσει τις οριακές πιθανότητες κ' να τις προσδιορίσετε, αν αυτό είναι εφικτό. (Ως Άσκηση)

13.11.14
Πέμπτη

Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες

<u>Μαρκοβιανή Αλυσίδα</u>: Είναι μία στοχαστική διαδικασία, δηλ. μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε <u>διακριτό χρόνο</u> (E) και με <u>διακριτό χώρο καταστάσεων</u> (S) με την ιδιότητα:

$$P(X_n=j \mid X_0 X_1 \dots X_{n-1}=i) = P(X_n=j \mid X_{n-1}=i)$$

Το παρόν καθορίζει το μέλλον, δεν μας ενδιαφέρει το παρελθόν.

Η πιθανότητα η στοχαστική μου διαδικασία να βρίσκεται στην κατάσταση j τη χρονική στιγμή n, δοθέντος που βρισκόταν τις χρονικές στιγμές $0,1,\dots,n-1$ ισούται με την πιθανότητα η στοχαστική διαδικασία να βρίσκεται στην κατάσταση j τη χρονική στιγμή n, δοθέντος ότι την προηγούμενη χρονική στιγμή $(n-1)$ βρίσκεται στην i.

Θα λέμε πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος: $P_{ij}(n-1,n)$

<u>Ομογενής Μ.Α</u>: Εκείνη η μαρκοβιανή αλυσίδα που οι πιθανότητες μετάβασης ενός βήματος είναι ανεξάρτητες από το n, $\forall i,j \in S$.

Γράφουμε: P_{ij}

Ομογενής Μαρκοβιανή Αλυσίδα Δύο Καταστάσεων

X_n: η στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο, $n=0,1,2,\dots$ και διακριτό χώρο καταστάσεων $S=\{0,1\}$, που ικανοποιεί την μαρκοβιανή ιδιότητα και την ιδιότητα της στατικότητας.

$$P_{ij}=P(X_n=j \mid X_{n-1}=i)=P(X_1=j \mid X_0=i), \quad \forall i,j \in S$$

$P_{00}=P(X_1=0 \mid X_0=0) \overset{\text{έστω}}{=\!=} 1-a$

$P_{01}=P(X_1=1 \mid X_0=0) =\!= a$

$P_{10}=P(X_1=0 \mid X_0=1) \overset{\text{έστω}}{=\!=} b$

$P_{11}=P(X_1=1 \mid X_0=1) =\!= 1-b$

Πίνακας Μετάβασης ενός βήματος

ΠΑΡΟΝ / ΜΕΛΛΟΝ

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad\quad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-a & a \\ & \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array}$$

(→ Να αθροίζουν στη μονάδα)

(→ Να αθροίζουν στη μονάδα)

Υποθέσεις:

- $a+b \neq 0$
- $a+b \neq 2$

Όταν $a+b=0 \Rightarrow a=0=b$.

Ασκήσεις 5, 24, 40, 46

Άσκηση 5

X_n: κατάσταση καιρού, που περιγράφεται από την στοχαστική διαδικασία, τη n-οστή μέρα

$X_n = 0$ βροχερή

$X_n = 1$ διαφορετικά

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Υποθέσεις

- $\boxed{a+b\neq 0}$

Όταν $a+b=0 \Rightarrow a=0=b$

$$P=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Ξεκινάω και η μέρα είναι βροχερή, τότε θα είναι πάντα βροχερή.

- $\boxed{a+b\neq 2}$

Όταν $a+b=2 \Rightarrow a=1=b$

$$P=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Αν ξεκινήσω με βροχή, μεθαύριο δε θα βρέχει, μετά θα βρέχει κ.ο.κ

---

① $P(X_n=j)=p_j^{(n)}$, $j=0,1$

② $P(X_n=j|X_0=i)=P_{ij}^{(n)}$, $\forall i,j\in S=\{0,1\}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty} p_j^{(n)}=\Pi_j$, $j=0,1$

$0<\Pi_j<1$, $\sum_{j=0}^{1}\Pi_j=\Pi_0+\Pi_1=1$

Ο χώρος των καταστάσεων $S=\{0,1\}$ είναι πεπερασμένος άρα υπάρχουν τα όρια.

$$P=\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

Για το ②: $P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P_{ij}^{(n)}$ διότι δεν μας ενδιαφέρει το βήμα αλλά το μήκος του βήματος, που πρέπει να είναι 1.

$P_{ij}^{(n)}$: η πιθανότητα $i \to j$ σε n βήματα

$P_{j}^{(n)}$: να βρίσκομαι στην j στο n-οστό βήμα.

Πίσω στην Άσκηση 5.

1η Γενάρη	2η	3η	4η	5η	6η
X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5

$$P(X_5=1 \mid X_0=1) = P_{11}^{(5)}$$

Αν δεν έχουμε αυτή τη γνώση $(X_0=1)$: $P(X_5=1)=P_1^{(5)}$

Θεωρείστε ότι αρχικά οι καταστάσεις είναι ισοπίθανες: $P(X_0=0)=\frac{1}{2}$, $P(X_0=1)=\frac{1}{2}$

$$P_j^{(n)} = P(X_n=j),\ \forall j \in S=\{0,1\}$$

$$P_0^{(n)} = P\left(\begin{array}{l}\text{να πάει στο 1ο βήμα στην 0 και από εκεί} \\ \text{σε n-1 βήματα στην 0 ή} \\ \text{να πάει στο 1ο βήμα στην 1 και από εκεί} \\ \text{στην 0 σε n-1 βήματα.}\end{array}\right)$$

ΛΑΘΟΣ!!!

$$= P\left(\begin{array}{c}\text{να πάει στο 1ο στην 0} \\ \text{κ' από εκεί στην 0 σε} \\ \text{n-1 βήματα}\end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c}\text{να πάει στο 1ο στην 1} \\ \text{κ' από εκεί στην 0 σε} \\ \text{n-1 βήματα}\end{array}\right)$$

Είναι ΛΑΘΟΣ να συνδέω με το πρώτο βήμα, πρέπει να συνδέω με το τι κάνει στο X_0. (!)

Επομένως θα έχω:

$$P_0^{(n)} = P\left(\begin{array}{l}\text{να βρίσκεται αρχικά στην 0}\\ \text{και από εκεί σε n βήματα}\\ \text{στην 0 } \underline{\acute{\eta}} \text{ να βρίσκεται}\\ \text{αρχικά στην 1 και από εκεί}\\ \text{στην 0 σε n βήματα}\end{array}\right)$$

$$= P\left(\begin{array}{c} X_0 = 0 \\ \kappa' \\ \text{από εκεί στην 0 σε n βήματα}\end{array}\right) + P\left(\begin{array}{c} X_0 = 1 \\ \kappa' \\ \text{από εκεί στην 0 σε n βήματα}\end{array}\right)$$

$$= P(X_0=0)P_{00}^{(n)} + P(X_0=1)P_{10}^{(n)}$$

Άρα: $\begin{cases} P_0^{(n)} = P(X_0=0)P_{00}^{(n)} + P(X_0=1)P_{10}^{(n)} \\ P_1^{(n)} = P(X_0=0)P_{01}^{(n)} + P(X_0=1)P_{11}^{(n)} \end{cases}$ και μπορούν να γραφούν ως:

$$\left(P_0^{(n)}, P_1^{(n)}\right) = \left(P(X_0=0), P(X_0=1)\right)\begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$$

$P^{(n)} = (P_0^{(n)}, P_1^{(n)})$ είναι τ/ώ $P^{(n)} = P^{(0)}\begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$ (2)

$$P_0^{(n)} = P\left(\begin{array}{l}\text{να βρίσκεται στην 0 στο n-1}\\ \kappa' \text{ από εκεί να πάει στο 0}\\ \acute{\eta} \text{ να βρίσκεται στην 1 στο}\\ \text{n-1 } \kappa' \text{ από εκεί να πάει στο 0}\end{array}\right) = P(X_{n-1}=0)P_{00}^{(1)} + P(X_{n-1}=1)P_{10}^{(1)}$$

$$= P(X_{n-1}=0)\cdot(1-a) + P(X_{n-1}=1)\cdot b$$

$$P_1^{(n)} = P(X_{n-1}=0)P_{01}^{(n)} + P(X_{n-1}=1)P_{11}^{(n)} = P(X_{n-1}=0)\cdot a + P(X_{n-1}=1)(1-b)$$

$$p_0^{(n)} = p_0^{(n-1)}(1-a) + p_1^{(n-1)} \cdot b$$

$$p_1^{(n)} = p_0^{(n-1)} \cdot a + p_1^{(n-1)}(1-b)$$

$$\begin{pmatrix} p_0^{(n)} & p_1^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0^{(n-1)} & p_1^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

Άρα $p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P = p^{(n-2)} P \cdot P = p^{(0)} \cdot P^n \Rightarrow \boxed{p^{(n)} = p^{(0)} P^n}$ (1)

<u>Στην Άσκηση 5</u>

$p_1^{(5)} = ;$

$$\begin{pmatrix} p_0^{(5)} & p_1^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{p_0^{(0)}}^{1/2} & \cancel{p_1^{(0)}}^{1/2} \end{pmatrix} P^5$$

<u>Από Γραμμική Άλγεβρα</u>

Έστω ένας πίνακας P με διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, τότε ο P γράφεται στη μορφή

$$P = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

όπου $Q = (q_1, q_2 \dots q_n)$ τ/ώ $Pq_i = \lambda_i q_i$ και τότε

$$P^k = Q \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} Q^{-1}$$

[Πρέπει να αποδεικνύω την (1) για να αποδείξω τη (2), για το ερώτημα 2]

<u>Ιδιοτιμές του P</u>

$$\begin{vmatrix} 1-a-\lambda & a \\ b & 1-b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - ab = 0 \rightarrow 1-b-\lambda-a+\cancel{ab}+a\lambda-\lambda+\lambda b+\lambda^2-\cancel{ab}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + (a+b-2)\lambda + (1-a-b) = 0$$

$$\Delta = (a+b-2)^2 - 4(1-a-b) = (a+b)^2 - 4(a+b) + \cancel{4} - \cancel{4} + 4a + 4b$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - \cancel{4a} - \cancel{4b} + \cancel{4a} + \cancel{4b}$$

$$= (a+b)^2$$

Για να έχω διακεκριμένες τιμές: $\Delta \neq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{a+b \neq 0}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2-a-b) \pm (a+b)}{2} \quad \begin{cases} \boxed{1 = \lambda_1} \\ \boxed{1-a-b = \lambda_2} \end{cases}$$

$$Q = (q_1, q_2) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$Pq_1 = \lambda_1 q_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-a)q_{11} + a q_{12} = q_{11} \\ b\, q_{11} + (1-b) q_{12} = q_{12} \end{cases} \Rightarrow \boxed{q_{12} = q_{11}}$$

(Διαλέγω ένα νούμερο, παίρνω 1 για ευκολία)

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & q_{21} \\ 1 & q_{22} \end{bmatrix}$$

$$Pq_2 = \lambda_2 q_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{pmatrix} = (1-a-b) \begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{a q_{22} = -b q_{21}}$$

$q_{22} = -\frac{b}{a} q_{21}$

$q_{21} = a$, $q_{22} = -b$

Επομένως: $Q = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix}$

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \begin{bmatrix} -b & -a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-b-a} \begin{bmatrix} -b & -a \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = Q^{-1}$$

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} 1 & a(1-a-b)^n \\ 1 & -b(1-a-b)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b+a(1-a-b)^n & a-a(1-a-b)^n \\ b-b(1-a-b)^n & a+b(1-a-b)^n \end{bmatrix} \quad (=P_{ij}^n)$$

$$\lim p^{(n)} = p^{(0)} \lim_{n\to\infty} P^n$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{bmatrix} = A$$

[Αν $|1-a-b|<1 \Rightarrow \lim (1-a-b) = 0.$]

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (p^{(n-1)} P) \Rightarrow (\pi_0 \ \pi_1) = (\pi_0 \ \pi_1) P$$

$$\Rightarrow (\pi_0 \ \pi_1) = (\pi_0 \ \pi_1) \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \pi_0(1-a) + b\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0 a + \pi_1(1-b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\pi_0 = b\pi_1 \\ b\pi_1 = a\pi_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\pi_0 = \frac{b}{a}\pi_1}$$

Γνωρίζω ότι $\pi_0 + \pi_1 = 1 \Rightarrow \frac{b}{a}\pi_1 + \pi_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{a}{a+b}}$ και $\boxed{\pi_0 = 1-\pi_1 = \frac{b}{a+b}}$

20/11/1
Πέμπτ

Άσκηση 3.2.3 (βιβλίο)

Η εναλλαγή βροχερών και στεγνών ημερών παριστάνεται από μια μαρκοβιανή αλυσίδα (Μ.Α) 2 καταστάσεων.

$S = \{$ Στεγνή $=0$, Βροχερή $=1\}$

Μας δίνονται μετρήσεις 2.437 ημερών.

		Σημερινή Μέρα (Μέλλον)	
		Στεγνή	Βροχερή
Προηγούμενη Μέρα (Παρόν)	Στεγνή	1049	350
	Βροχερή	351	687

1. Να βρεθεί ο πίνακας P
2. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P_{ij}^{(n)}$, $\forall i,j \in S$
3. Αν η σημερινή μέρα είναι στεγνή, μετά από πόσες μέρες αναμένεται να βρέξει;

Λύση

1. Στεγνές μέρες: 1049+350
   Βροχερές μέρες: 351+687

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1049}{1049+350} & \frac{350}{1049+350} \\ \frac{351}{351+687} & \frac{687}{351+687} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

2. Αποδεικνύω $p^{(n)} = p^{(n-1)} P = p^{(0)} P^n$ και μετά $P_{ij}^{(n)}$

3. Αναμένεται = αναμενόμενη τιμή

   ET, όπου T η τ.μ που μετρά το χρόνο μέχρι την 1η βροχή ενώ σήμερα είναι στεγνή ημέρα.

Δυνατές τιμές της $T: 1, 2, 3, \dots$ (Θα περιμένω 1 μέρα αν βρέξει αύριο, 2 αν βρέξει μεθαύριο κοκ)

$P(T=1) = \alpha$

$P(T=2) = P(0 \to 0 \to 1) = (1-\alpha)\cdot\alpha$

$P(T=3) = (1-\alpha)^2 \cdot \alpha$

Γενικά: $P(T=k) = (1-\alpha)^{k-1} \cdot \alpha \quad , k=1,2,3\dots$

$$ET = \sum_{k=1}^{\infty} k P(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\alpha)^{k-1} \cdot \alpha$$

Από τον τύπο που μας δίνεται: $(1-x)^{-1} = \sum x^n$

Παραγωγίζω: $(1-x)^{-2} = \sum n x^{n-1} \quad (*)$

χρησιμοποιώ την $(*)$ για $x = 1-\alpha$.

Άρα: $$ET = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\alpha)^{k-1} \cdot \alpha = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\alpha)^{k-1} = \alpha \left[1-(1-\alpha)\right]^{-2} = \alpha \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}.$$

Άσκηση 3.2.4 (βιβλίο)

Τα πειράματα έχουν την μαρκοβιανή ιδιότητα.

$P(\text{Σωστά} \to \text{Σωστά}) = 0.7$

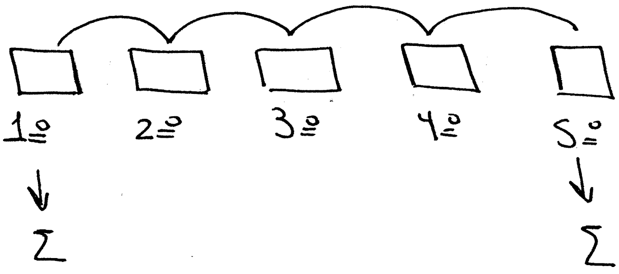
$P(\text{Σωστά} \to \text{Λανθασμένα}) = 0.3$

$P(\text{Λανθασμένος} \to \text{Σωστά}) = 0.4$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0=\Sigma \\ 1=\Lambda \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \Sigma & \Lambda \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3=\alpha \\ 0.4=b & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

1. Αν στο 1º πείραμα ο ασθενής αντιδρά σωστά ποια η πιθανότητα ν'αντιδράσει σωστά στο 5º πείραμα.

P(ν'αντιδράσει σωστά στο 5º πείραμα | στο 1º αντέδρασε σωστά)

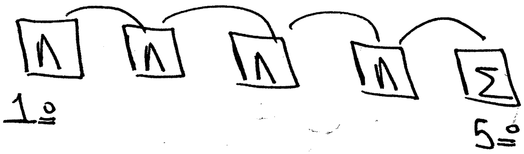


(4 βήματα)

$P_{00}^{(4)}$. Αποδεικνύω $p^{(n)} = p^{(0)} p^n \Rightarrow p^{(n)} = p^{(0)} \cdot A$ (βλ. θεωρίου).

Άρα $p^4 = \begin{bmatrix} (*) = P_{00}^{(4)} & \\ & \end{bmatrix}$

2. Αν στο 1ο πείραμα αντέδρασε λανθασμένα ποια η πιθανότητα ν'αντέδρασε σωστά για 1η φορά στο 5ο πείραμα;



$(1-b)\ (1-b)\ (1-b)\ b$ (Μπορώ να το αφήσω έτσι, χωρίς πράξεις)

Άσκηση 3.2.1

Μαρκοβιανή Αλυσίδα 2 καταστάσεων.

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array}$$

Αν $\mu_{ij}^{(n)}$: ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων της κατάστασης j σε n βήματα αρχίζοντας από την i.

$\mu_{ij}^{(n)} = E X_{ij}^{(n)}$, όπου $X_{ij}^{(n)}$ η τ.μ που παριστάνει τον αριθμό των επισκέψεων της κατάστασ j σε n βήματα ξεκινώντας από την i.

Το $X_{ij}^{(n)}$ είναι το άθροισμα κάποιων παρατηρήσεων.

$$X_{ij}^{(n)} = \underbrace{Y_{ij}^{(1)}}_{\text{αυτο επισκέφθω την 1η φορά}} + \underbrace{Y_{ij}^{(2)}}_{\text{τη 2η φορά}} + \dots + Y_{ij}^{(n)}, \quad \text{όπου} \quad Y_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{όταν επισκέπτεται την } j, \text{ ξεκινώντας από την } i \text{ στο K-βήμα.} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$EX_{ij}^{(n)} = E(Y_{ij}^{(1)} + \dots + Y_{ij}^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_{ij}^{(k)}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot P(Y_{ij}^{(k)} = 1) \underbrace{+ 0 \cdot P(Y_{ij}^{(k)} = 0)}_{0} = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)}$$

Άσκηση 3.2.2 (βιβλίο)

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array}$$

Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή η διαδικασία βρίσκεται στην i κατάσταση ($i=0,1$) και a_i: αριθμός των νέων χρονικών περιόδων που η διαδικασία παραμένει στην i μέχρι να πάει στην άλλη.

a_0: η Τ.Μ που παριστάνει τον αριθμό των νέων περιόδων που η διαδικασία παραμένει στην 0 μέχρι να μεταπηδήσει στην 1.

Δυνατές τιμές της a_0: $0, 1, 2, 3, \dots$

$$P(a_0 = 0) = P(0 \to 1) = a$$

$$P(a_0 = 1) = P(0 \to 0 \to 1) = (1-a) \cdot a$$

$$P(a_0 = 2) = P(0 \to 0 \to 0 \to 1) = (1-a)^2 \cdot a$$

Γενικά: $P(a_0 = k) = (1-a)^k \cdot a \quad , k = 0, 1, \dots$

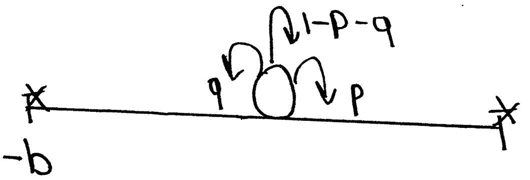
$$Ea_0 = \sum_{k=0}^{\infty} k P(a_0 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-a)^k a = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-a)^{k-1} (1-a) \cdot a$$

$$= (1-a)a \sum_{k=0}^{\infty} k(1-a)^{k-1} = a(1-a)\left[1-(1-a)\right]^{-2} = \frac{1-a}{a}.$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες με Περισσότερες από 2 καταστάσεις

Παραδείγματα

① Έστω X_n η σ.δ που περιγράφει έναν απλό τυχαίο περίπατο με 2 φράγματα απορρόφησης στο $-b$ και στο a. $(a,b>0)$



Δύο παίκτες : ο Α έχει €5

ο Β έχει €3

Παίζουν ένα τυχερό παιχνίδι και κάθε φορά ο ηττημένος δίνει €1 στον αντίπαλο.

$p = P(\text{να κερδίσει ο A})$

$q = P(\text{να κερδίσει ο B})$

X_n: κέρδος του Α

$S = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$$P = \begin{array}{c|ccccccccc} & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & \ddots & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & & & \ddots & & \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & (1-p-q) & p \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

② Αν είχα ένα φράγμα τότε

$$
P = \begin{array}{c|ccccccccccc}
 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & \\
\hline
-5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\
-4 & q & & & & & & & & & & \\
-3 & 0 & & & & & & & & & & \\
-2 & 0 & & & & & & & & & & \\
-1 & 0 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & & & & & & \\
2 & 0 & & & & & & & & & & \\
3 & 0 & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
P = \begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
\hline
0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
1 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 & \cdots \\
2 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 & \cdots \\
3 & & & & & & \\
4 & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

③ Θεωρείστε ένα σύστημα εξυπηρέτησης. Πελάτες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, και εξυπηρετούντε από ένα υπάλληλο.

X_n: η σ.δ που παριστάνει τον αριθμό των πελατών που είναι μέσα στο σύστημα αμέσως μετά το τέλος της εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη.

Να αιτιολογηθεί πλήρως ότι πρόκειται για μαρκοβιανή αλυσίδα κ' να βρεθεί ο πίνακας μετάβασής της στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι σταθερός και ίσος με t χρονικές μονάδες

(ii) ο χρόνος εξυπηρέτησης περιγράφεται από μια διακριτή τ.μ με τιμές έστω $t_1, t_2, \ldots, t_k$

(iii) ο χρόνος εξυπηρέτησης περιγράφεται από την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ

(iv) ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί μια κατανομή με σ.π.π $b(t)$

<u>Λύση</u>

·Έχω διακριτό χρόνο σε διακριτό χώρο $(0, 1, \ldots, \infty)$

Θα ελέγξω αν έχω μαρκοβιανή ιδιότητα:

$$\underbrace{X_{n+1}}_{\substack{\text{Αρ. πελατών}\\ \text{αμέσως μετά}\\ \text{το τέλος του}\\ \text{n+1 - πελάτη}}} = \begin{cases} \underbrace{X_n - 1}_{\text{αρ. πελατών}} + \underbrace{A_{n+1}}_{\substack{\text{όσοι θα έρθουν}\\ \text{εκείνη τη}\\ \text{στιγμή}}} & , X_n \geq 1 \\ A_{n+1} & , X_n = 0 \end{cases}$$

Το n+1 καθορίζεται <u>μόνο</u> από το n.

A_{n+1} η τ.μ που περιγράφει τον αριθμό των αφίξεων κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης του n+1 πελάτη.

A_{n+1} = Β πιθανότητα να έρθει ο ίδιος αριθμός αφίξεων σε κάθε πελάτη (ισοπίθανα), γι' αυτό τη βάζω σταθερή.

Επομένως ισχύει η μαρκοβιανή ιδιότητα.

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array} \\
\begin{bmatrix}
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$b_0 = P(B=0)$

$b_1 = P(B=1)$

$b_k = P(B=k)$

Poisson: $\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

(i) $P(B=k) = P\left(\begin{array}{l}\text{να έχω } k \text{ αφίξεις στη διάρκεια} \\ \text{της εξυπηρέτησης του πελάτη}\end{array}\right)$

$$= \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$

Κατανομή-Συμβολισμός	Σ.Π.Π ή Σ.Π.	EX	$VarX$	$m_X(t)$
Διωνυμική B(n,p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x=0,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$\left[pe^t+(1-p)\right]^n, t\in R$
Γεωμετρική Geo(p)	$p(1-p)^{x-1}, x=1,2,\dots$	$1/p$	$(1-p)/p^2$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t},$ $t<-\ln(1-p)$
Αρνητική Διωνυμική NB(r,p)	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r},$ $x=r,r+1,\dots$	r/p	$r(1-p)/p^2$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r,$ $t<-\ln(1-p)$
Υπεργεωμετρική (N,M,n)	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},$ $x=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	-
Poisson (λ)	$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x=0,1,\dots.$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}, t\in R$
Ομοιόμορφη $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}, x\in(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}, t\in R$
Εκθετική (λ)	$\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\lambda/(\lambda-t), t<\lambda$
Γάμμα (α,β)	$\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}, x\geq 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$(1-\beta t)^{-\alpha}, t<\frac{1}{\beta}$
Βήτα (α, β)	$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, 0<x<1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	-
Κανονική $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x\in R$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
X_n^2	Γάμμα (n/2,2)	n	$2n$	$(1-2t)^{-n/2}, t<\frac{1}{2}$

Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από την $N(\mu,\sigma^2)$ τότε:

i) $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ ii) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ και iii) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2$

27/11/14
Πέμπτη

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \\ & b_0 & b_1 & \dots & \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad b_k = P(B=k)$$

$= P$ (να έρθουν k πελάτες κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρέτησης)

Πελάτες $\longrightarrow$ Poisson με λ

① Χρόνος εξυπηρέτησης σταθερός π.χ t χρονικές μονάδες

② Χρόνος εξυπηρέτησης περιγράφεται από μια τ.μ T με διακριτές τ.μ π.χ $t_1, t_2, \dots$

$$P(T=t_i) = p_i, \; i=1,2,\dots,n$$

③ Χρόνος εξυπηρέτησης περιγράφεται από μια τ.μ με σ.π.π $b(t)$

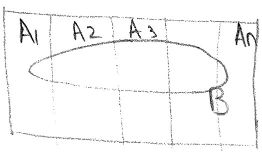
④ Ειδική περίπτωση $b(t) \rightarrow$ Εκθετική (μ)

Θα υπολογίσουμε το b_k για κάθε περίπτωση:

① $b_k = P(B=k) = \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$

$P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, στη μονάδα του χρόνου.

② $b_k = P(B=k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B=k \mid T=t_i)\, P(T=t_i)$



$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda t_i}(\lambda t_i)^k}{k!} \cdot p_i$$

③ $b_k = P(B=k) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ P(t<T<t+dt)}}{b(t)\, dt}$

Επειδή είμαστε σε συνεχή περίπτωση. Το άθροισμα της ② έγινε ολοκλήρωμα.

④ $$b_k = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \cdot \mu e^{-\mu t}\, dt$$

$$= \mu \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\mu+\lambda)t}\, dt$$

$$= \frac{\mu\lambda^k}{k!} \int_0^\infty t^{k+1-1} e^{-t/[1/(\mu+\lambda)]} \cdot dt$$

$$= \frac{\mu\lambda^k}{\cancel{k!}} \left(\frac{1}{\mu+\lambda}\right)^{k+1} \Gamma(\cancel{k}+1) \underbrace{\int_0^\infty \frac{t^{k+1-1} e^{-(\mu+\lambda)t}}{\left(\frac{1}{\mu+\lambda}\right)^{k+1} \Gamma(k+1)} dt}_{1}$$

f(t) σ.π.π
$f(t) \geq 0$
$\int f(t)\,dt = 1$
Π.ο

Παίρνω την Γάμμα(α,β) $\frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, x>0$

Οι άλλες κατανομές δε με βοηθούν λόγω Π.ο και επειδή δε μοιάζουν με το εσωτερικό του ολο/κος.

Άρα: $$b_k = \frac{\mu\lambda^k}{(\mu+\lambda)^{k+1}}$$

<u>Ερωτήματα</u>

1º $P_j^{(n)} = P(X_n = j)$

2º $P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

3º $\pi_j = \lim P_{ij}^{(n)} = \lim P_j^{(n)}$

$\sum \pi_j = 1$

1º) $P(X_n=j) = P_{0j}^{(1)} P(X_{n-1}=0) + P_{1j}^{(1)} P(X_{n-1}=1) + P_{2j}^{(1)} P(X_{n-1}=2) + \dots$

$$\Rightarrow P(X_n=j) = \begin{pmatrix} P(X_{n-1}=0) & \dots & P(X_{n-1}=1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{0j}^{(1)} \\ P_{1j}^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P(X_n=j) = P^{n-1}$ * j στήλη του πίνακα P

$P^{(n)} = P^{(n-1)} P = P^{(0)} \cdot P^n \Rightarrow \boxed{P^{(n)} = P^{(0)} \cdot P^n}$

(2ος) $P(X_n=j) = P(X_0=0) P_{0j}^{(n)} + P(X_0=1) P_{1j}^{(n)} + P(X_0=2) P_{2j}^{(n)} + \dots$

$$P(X_n=j) = \left(P(X_0=0)\ P(X_0=1)\ P(X_0=2) \dots\right) \begin{pmatrix} P_{0j}^{(n)} \\ P_{1j}^{(n)} \\ P_{2j}^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$P(X_n=j) = P^{(0)} \begin{pmatrix} P_{0j}^{(n)} \\ P_{1j}^{(n)} \\ P_{2j}^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\boxed{P^{(n)} = P^{(0)} A}$, όπου $A = \begin{pmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & \dots \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} & \dots \\ P_{20}^{(n)} & P_{21}^{(n)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

Άρα $P_{ij}^{(n)}$ είναι τα στοιχεία του P^n

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ CHAPMAN-COLMOGOROV

$$P^{m+n} = P^m \cdot P^n$$

$$P_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n)}$$

ΟΡΙΣΜΟΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ

Ορισμός 1 Η κατάσταση $j \in E$ ονομάζεται προσιτή από την $i \in E$ όταν:

$$\exists n : P_{ij}^{(n)} > 0$$

Συμβολίζεται: $i \to j$

Ορισμός 2 Οι καταστάσεις $i,j \in E$ επικοινωνούν όταν $i \leftrightarrow j$, δηλ. όταν $i \to j$ και $j \to i$.

$$\exists n : P_{ij}^{(n)} > 0$$

$$\exists m : P_{ji}^{(m)} > 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ Μια σχέση επικοινωνίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας

(i) $i \leftrightarrow i$ (ανακλαστική)

(ii) $i \leftrightarrow j$ τότε $j \leftrightarrow i$ (συμμετρική)

(iii) $i \leftrightarrow j$ $j \leftrightarrow k$ τότε $i \leftrightarrow k$ (μεταβατική)

Απόδειξη

(i) $P_{ii}^{(0)} = 1$

(ii) $i \leftrightarrow j$ $\exists n$ $P_{ij}^{(n)} > 0$

$\exists m$ $P_{ji}^{(m)} > 0$

(iii) $j \leftrightarrow k$ $\exists a$ $P_{jk}^{(a)} > 0$

$\exists b$ $P_{kj}^{(b)} > 0$

$i \to k$ $P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(a)} > 0$

Θδο $\exists (n+a) : P_{ik}^{(n+a)} = \sum_{l} P_{il}^{(n)} P_{lk}^{(a)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(a)} > 0$

$k \to i$ Ξέρω ότι: $P_{kj}^{(b)} P_{ji}^{(m)} > 0$

Θδο $\exists (b+m) : P_{ki}^{(b+m)} = \sum_{l} P_{kl}^{(b)} P_{li}^{(m)} \geq P_{kj}^{(b)} P_{ji}^{(m)} > 0$

Παρατηρήσεις

Οι καταστάσεις που επικοινωνούν μεταξύ τους φτιάχνουν μια κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων.

Ορισμός 3 Αν μια μαρκοβιανή αλυσίδα έχει όλες τις καταστάσεις της να ανήκουν σε μία και μόνο κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων τότε ονομάζεται μη-διαχωρίσιμη

ΟΡΙΣΜΟΙ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΜΟΤΗΤΑΣ

$$f_{ij}^{(n)} = P(\underline{X_n=j \quad X_r \neq j} \quad \underset{r<n}{r \neq n} \mid X_0=i)$$

$$= P\left(\begin{array}{l}\text{να φτάσω στην κατάσταση } j \text{ για} \\ \underline{1^{η} \text{ φορά}} \text{ τη χρ. στιγμή } n, \text{ δοθέντος} \\ \text{ότι ξεκίνησα από την } i\end{array}\right)$$

$$f_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = P\left(\begin{array}{l}\text{να φτάσω κάποια χρ. στιγμή} \\ \text{στο } j \text{ ξεκινώντας από το } i\end{array}\right)$$

$$f_{ii}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = P\left(\begin{array}{l}\text{επιστροφής στο } i \\ \text{δεδομένου ότι ξεκίνησε από το } i\end{array}\right)$$

μ_i = ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων για επιστροφή στην i

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

T τ.μ αριθμού βημάτων για την επιστροφή

Δυνατές τιμές : 1,2,3,4,5,...

$$ET = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(T=n)$$

Ορισμός Η κατάσταση $i \in I$ λέμε ότι είναι <u>επαναληπτική</u> αν-ν $f_{ii}^{*} = 1$, δηλ. όταν η πιθανότητα να επιστρέψει στην i είναι μονάδα.

Ορισμός Η κατάσταση $i \in I$ λέγεται <u>ασαφώς επαναληπτική</u> αν-ν $f_{ii}^{*} = 1$ και $\mu_i = \infty$.

Ορισμός <u>Θετικώς επαναληπτική</u> αν-ν $f_{ii}^* = 1$, $\mu_i < \infty$

Ορισμός <u>Παροδική</u> αν-ν $f_{ii}^* < 1$, άρα υπάρχει θετική πιθανότητα να μην επιστρέψει.

Ορισμός <u>Απορροφητική</u> όταν $P_{ii}^{(1)} = 1$

Ορισμός <u>Περίοδος</u> μιας κατάστασης i ονομάζεται ο ΜΚΔ d_i όλων των ακεραίων $n \geq 1$ για τους οποίους $P_{ii}^{(n)} > 0$.

Ορισμός Η κατάσταση λέγεται <u>περιοδική</u> αν $d_i > 1$
<u>απεριοδική</u> αν $d_i = 1$

Ορισμός <u>Εργοδική</u> είναι μια κατάσταση i, θετικώς επαναληπτική και απεριοδική.

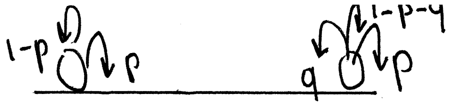
<u>Παρατήρηση</u>

Από τον πίνακα μετάβασης μπορώ να γνωρίζω κατά πόσο επικοινωνούν οι καταστάσεις.

<u>Παράδειγμα</u> 1

Τυχαίος περίπατος με 1 φράγμα ανάκλασης στο 0

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 1-p-q & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 1-p-q & 0 & \cdots \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$



$0 \leftrightarrow 3 \quad \exists n \;\; P^{(n)}_{03} > 0$

$\exists m \;\; P^{(m)}_{30} > 0$

$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \rightarrow \; . \; . \; .$

$P^{(3)}_{03} = p\,p\,p$

$P^{(3)}_{30} = q \cdot q \cdot q$

Παράδειγμα 2

Τυχαίος περίπατος με 2 φράγματα απορρόφησης

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 \\ 2 & 0 & q & 1-p-q & p & 0 \\ 3 & 0 & 0 & q & 1-p-q & p \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

0

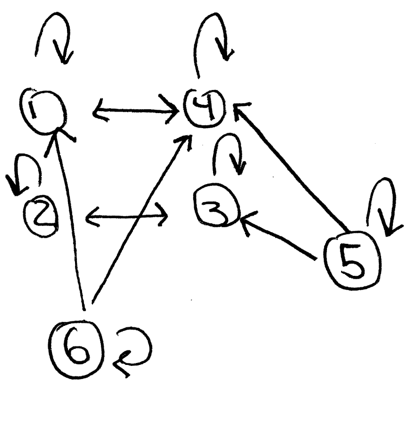
$0 \leftarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \rightarrow 4$

$1 \leftrightarrow 3 \qquad 3 \rightarrow 4$

$4 \not\rightarrow 3$

Παράδειγμα 3

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0.6 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 6 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{array}$$



$1 \leftrightarrow 4$

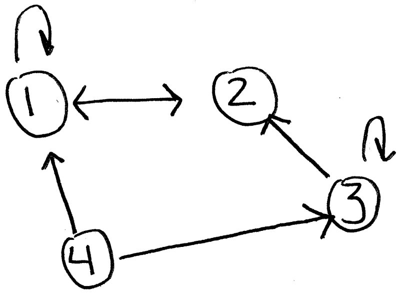
$2 \leftrightarrow 3$

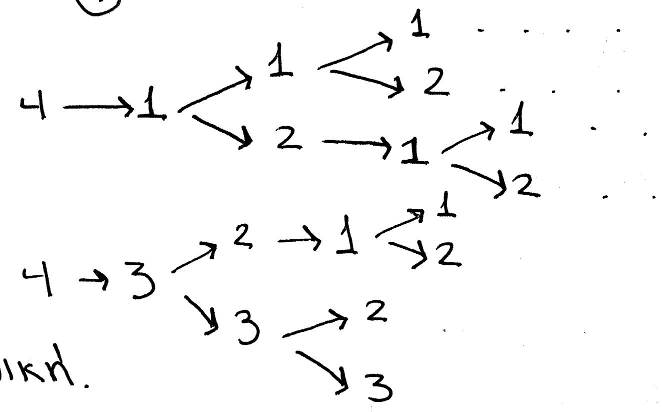
$5 \rightarrow 2$

$P^{(2)}_{53} = P(5\to3\to3 \text{ ή } 5\to4\to3 \text{ ή } 5\to5\to3) = 0.2\;0.3 + 0.4\;0 + 0.4\;0.2$

Παράδειγμα 4

$$
P = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc}
1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$





$f_{44}^{(n)} = 0$, άρα f_{44} παροδική

$f_{33}^{(n)}$ $\quad n=1: \ f_{33}^{(1)} = \frac{2}{3} < 1$: παροδική.

$n=2: \ f_{33}^{(2)} = 0$

$n \geq 2: \ f_{33}^{(n)} = 0$

Να αποδείξετε ότι οι 1 και 2 είναι επαναληπτικές.

Κωδικός για τις σημειώσεις: apostolis532

04/12/14
Πέμπτη

Υπενθύμιση

$f_{ij}^{(n)} = P(X_n=j,\ X_r \neq j\ ,r<n \mid X_0=i) \rightarrow$ περνώ πρώτη φορά στο j στο n-οστό βήμα

$p_{ij}^{(n)} = P(X_n=j \mid X_0=i)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $P_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$ και $F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$ με $|s|<1$ τότε

$$F_{ij}(s) = \frac{P_{ij}(s)}{1+P_{jj}(s)} \quad \text{και} \quad P_{ij}(s) = \frac{F_{ij}(s)}{1-F_{jj}(s)}$$

* j παροδική αν-ν $F_{jj}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = f_{jj}^{*} < 1$

j επαναληπτική αν-ν $F_{jj}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$.

Απόδειξη

$s^1 \quad p_{ij}^{(1)} = f_{ij}^{(1)}$

$s^2 \quad p_{ij}^{(2)} = P$ (i ↦ j για 1η φορά στο 1ο βήμα και j ↦ j ή i ↦ j για 1η φορά στο 2ο βήμα) $= f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(2)}$

$s^3 \quad p_{ij}^{(3)} = f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(2)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(3)}$

$s^4 \quad p_{ij}^{(4)} = f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(3)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(2)} + f_{ij}^{(3)} p_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(4)}$

$\vdots$

$s^n \quad p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(n-2)} + \dots + f_{ij}^{(n)}$

$$P_{ij}(s) = f_{ij}^{(1)} s^1 \left(1 + s P_{jj}^{(1)} + s^2 P_{jj}^{(2)} + \dots\right)$$
$$+ f_{ij}^{(2)} \cdot s^2 \left(1 + s P_{jj}^{(1)} + s^2 P_{jj}^{(2)} + \dots\right)$$
$$+ f_{ij}^{(3)} s^3 \left(1 + s P_{jj}^{(1)} + s^2 P_{jj}^{(2)} + \dots\right)$$

$$P_{ij}(s) = \left(1 + P_{jj}(s)\right) F_{ij}(s) \qquad (1)$$

$$F_{ij}(s) = \frac{P_{ij}(s)}{1 + P_{jj}(s)}$$

$$\xrightarrow[i=j]{(1)} P_{jj}(s) = \left(1 + P_{jj}(s)\right) F_{jj}(s) \Rightarrow P_{jj}(s) = \frac{F_{jj}(s)}{1 - F_{jj}(s)}$$

Άρα από την (1) έχουμε

$$P_{ij}(s) = \left(1 + \frac{F_{jj}(s)}{1 - F_{jj}(s)}\right) F_{ij}(s) = \frac{F_{ij}(s)}{1 - F_{jj}(s)}$$

Συνοψίζοντας: $\boxed{F_{ij}(s) = \frac{P_{ij}(s)}{1 + P_{jj}(s)}}$ (1) $\boxed{P_{ij}(s) = \frac{F_{ij}(s)}{1 - F_{jj}(s)}}$ (2)

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{ij}^{(n)} s^n$$

$$F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$$

ΛΗΜΜΑ ABEL (για δυναμοσειρές)

Έστω $\{G_k\}$ μια ακολουθία μη-αρνητικών όρων. Αν $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k s^k$ συγκλίνει τότε $\lim_{s \to 1} G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια κατάσταση $j \in E$ μιας στατικής μαρκοβιανής αλυσίδας

(i) j παροδική αν-ν $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ συγκλίνει κι αν συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ συγκλίνει για κάθε $i \in E$.

(ii) j επαναληπτική αν-ν $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ αποκλείνει και τότε αποκλείνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ για κάθε i για το οποίο $i \mapsto j$

Απόδειξη

(i) j παροδική αν-ν $f_{jj}^{*} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1 \Leftrightarrow F_{jj}(1) < 1$.

Όμως, $P_{jj}(1) \overset{(2)}{=\!=} \dfrac{F_{jj}(1)^{<1}}{1 - \underbrace{F_{jj}(1)}_{\text{πεπερ.}}} < \infty$

$$P_{ij}(1) = \frac{F_{ij}(1)}{1 - F_{jj}(1)} < \infty$$

(ii) j επαναληπτική αν-ν $f_{jj}^{*} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1 \Leftrightarrow F_{jj}(1) = 1$.

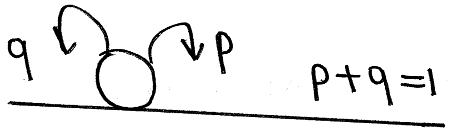
$P_{jj} \overset{(2)}{=} \dfrac{F_{jj}(1)^{=1}}{1 - \underbrace{F_{jj}(1)}_{=1}} = +\infty$, $P_{ij}(1) \overset{(2)}{=} \dfrac{F_{ij}(1)}{1 - F_{jj}(1)} = \infty$.

$F_{ij}(1) = \sum f_{ij}^{(n)}$, $i \mapsto j$ $F_{ij}(1) > 0$ $\exists n : P_{ij}^{(n)} > 0$

Όταν η j <u>ΠΑΡΟΔΙΚΗ</u> τότε $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_j^{(n)} = 0$

<u>Άσκηση (Θέμα)</u>

Έχετε έναν ελεύθερο απλό τυχαίο περίπατο όπου η κίνηση του σώματος είναι



Αν Z_i η μετατόπιση τότε: $P(Z_i=z)=\begin{cases} p, & z=1\\ q, & z=-1\end{cases}$

Να εξετάσετε αν η κατάσταση 0 είναι παροδική.

<u>Λύση</u>

Αρκεί να εξετάσω τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(n)}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} P_{00}^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{00}^{(2k)}$ (δεν μπορώ να γυρίσω στο 0 σε μονό αρ. βημάτων)

$P_{00}^{(2k)} = \binom{2k}{k} p^k q^k$ (όσες νίκες τόσες ήττες)

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}^{(2k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} p^k q^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!\,k!} p^k q^k$

(ΤΥΠΟΣ STIRLING: $n! \simeq n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{00}^{(2k)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{2k+1/2} \cancel{e^{-2k}} \cancel{\sqrt{2\pi}}}{k^{k+1/2} \cancel{e^{-k}} \cancel{\sqrt{2\pi}}\, k^{k+1/2} \cancel{e^{-k}} \sqrt{2\pi}} p^k q^k$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k} \cdot 2^{1/2} \cdot k^{2k} \cdot k^{1/2}}{k^{2k} \cdot k \cdot 2^{1/2} \cdot \sqrt{\pi}} p^k q^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4pq)^k}{\sqrt{k}\sqrt{\pi}}$$

<u>1η Περίπτωση</u> αν $4pk<1$ συγκλίνει

<u>2η Περίπτωση</u> $4pq>1$ άτοπο αφού $4pq>(p+q)^2 \Rightarrow 0>(p+q)^2-4pq$
$\Rightarrow 0>(p-q)^2$

<u>3η Περίπτωση</u> $4pq=1 \Rightarrow pq=\frac{1}{4} \Rightarrow p=q$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{00}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}\sqrt{\pi}}$$ αποκλίνει

$\frac{1}{k^p} < \infty$ όταν $p>1$

Άρα επαναληπτική

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Έστω $j \in E$ είναι μια επαναληπτική απεριοδική κατάσταση κι έστω $\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$ ο μέσος χρόνος επανάληψης της, τότε:

$$\lim P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}, \quad \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{F_{ij}(1)}{\mu_j}, \ \forall i \in E$$

<u>ΣΥΝΟΨΗ</u>

- j παροδική ή ασαφώς επαναληπτική και απεριοδική τότε

$$\lim P_{ij}^{(n)} = \lim \ ^{(n)} \ = 0$$

- j θετικώς επαναληπτική και απεριοδική $\rightarrow$ ΘΕΩΡΗΜΑ

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>

Αν $i \in E$ επαναληπτική και $i \mapsto j$ τότε $j \mapsto i$

<u>Απόδειξη</u>

i επ/κή σημαίνει ότι $f_{ii}^{*}=1$

$i \mapsto j$: $\exists n \geq 0$ τ/ώ $P_{ij}^{(n)}>0$

Θέλω νδο $j \to i$.

Αρκεί νδο $\exists m > 0$ τ/ώ $P_{ji}^{(m)} > 0$

Όμως ισχύει λόγω των δύο παραπάνω.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Από επ/κές καταστάσεις μόνο επ/κές καταστάσεις είναι προσιτές.

Αν $i \in E$ επ/κή και $i \mapsto j$ τότε j επ/κή.

Απόδειξη (όχι Γενάρη)

$f_{ii}(1) = f_{ii}^{*} = 1$ αφού είναι επ/κή, $i \mapsto j : \exists n > 0$ $P_{ij}^{(n)} > 0$.

Τότε από προηγούμενη ΠΡΟΤΑΣΗ και $j \mapsto i$, δηλ. $\exists m > 0$ τ/ώ $P_{ji}^{(m)} > 0$

Θέλω νδο η j είναι επ/κή.

Αρκεί νδο $\sum P_{jj}^{(k)}$ αποκλίνει.

$$P_{jj}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{jj}^{(k)} \geq \sum_{k=n+m+1} P_{jj}^{(k)} = \sum_{l=1} P_{jj}^{(n+m+l)} \geq \sum_{l=1} P_{ij}^{(n)} P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(l)}$$

$$P_{jj}^{(n+m+l)} \geq P_{ji}^{(m)} P_{ij}^{(n)} P_{ii}^{(l)}$$

$j \to j$ σε $n+m+l$ βήματα

$$P_{jj}(1) \geq \sum_{l=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} P_{ji}^{(m)} P_{ii}^{(l)} = P_{ij}^{(n)} P_{ji}^{(m)} \sum_{l=1}^{\infty} P_{ii}^{(l)} = l\, P_{ii}(1) \xrightarrow[P_{ii}(1) = +\infty]{i \text{ επ/κή}} +\infty$$

Άρα επ/κή κατάσταση.

ΘΕΩΡΗΜΑ (SOS!)

Σε μια κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων όλες οι καταστάσεις είναι του ίδιου τύπου, δηλ. $i \leftrightarrow j$, τότε:

(i) i,j επ/κές θετικώς

(ii) i,j επ/κές ασαφώς

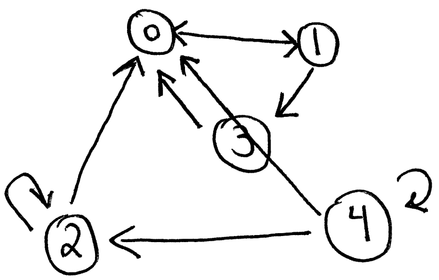
(iii) i,j παροδικές

Παράδειγμα (1)

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Υπάρχουν οι οριακές καταστάσεις εφόσον το πλήθος των καταστάσεων είναι πεπερασμένο (!)

(0 επικοινωνεί με 3 $0 \mapsto 1 \mapsto 3$)

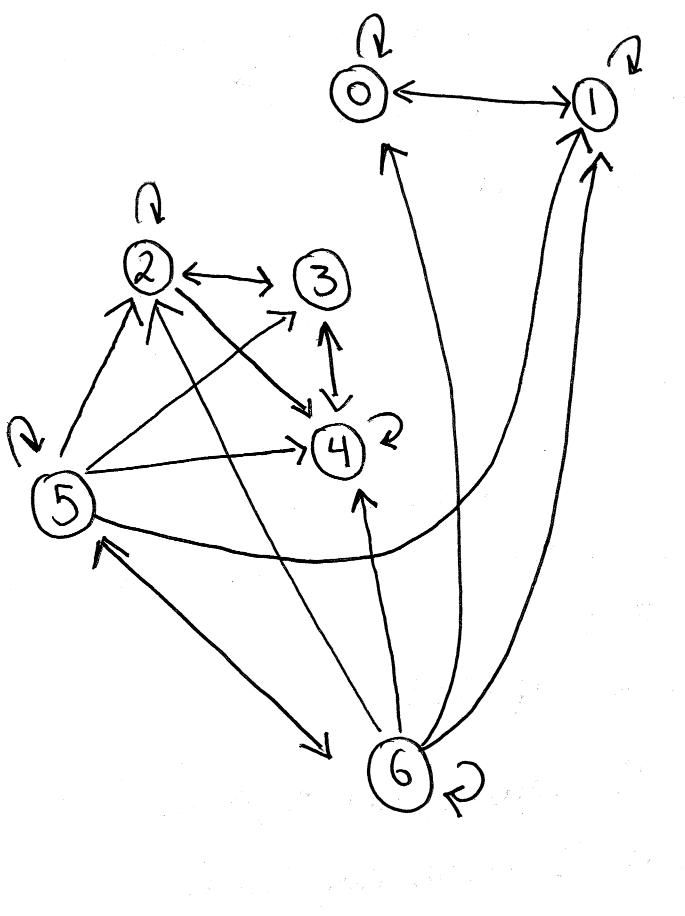


- έστω 2 επαναληπτική
  είναι $2 \to 0$ τότε θα έπρεπε $0 \to 2$
  Άτοπο!
  Άρα 2 παροδική

- έστω 4 επαναληπτική, άτοπο!
  Άρα η 4 είναι παροδική.
  $\{0,1,3\}$ επαναληπτικές
  $\{2,4\}$ παροδικές $\Rightarrow \pi_2 = \pi_4 = 0$

Παράδειγμα (2)

$$P = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{array}$$



$\{0,1\}$ επ/κή

$\{2,3,4\}$ επ/κή

$\{5,6\}$ παροδικές.

11/12/14
Πέμπτη

Ορισμός

Μια μαρκοβιανή αλυσίδα λέγεται μη-διαχωρίσιμη όταν όλες οι καταστάσεις είναι του ιδίου τύπου.

Θεώρημα

Μια μη-διαχωρίσιμη μ.α με πεπ/νο πλήθος καταστάσεων είναι <u>πάντα</u> θετικώς επαναληπτική.

Απόδειξη

Έστω $j \in E$ παροδική ή ασαφώς επ/κη, δηλ. υποθέτω ότι $\lim P_{ij}^{(n)} = 0, \forall i \in E$

$$\sum_i P_{ij}^{(n)} = 1 \Rightarrow \lim \sum_{i\in E} P_{ij}^{(n)} = 1 \xrightarrow[\text{καταστάσεων}]{\text{πεπ/νο πλήθος}} \sum_{i \in E} \lim P_{ij}^{(n)} = 1$$

$$\xrightarrow{\lim P_{ij}^{(n)} = 0} \sum 0 = 1 \quad \text{Άτοπο!}$$

Άρα είναι θετικώς επ/κη. ∎

- j παροδική ή ασαφώς επ/κη : $\lim P_{ij}^{(n)} = 0$
- j θετικώς επ/κή και απεριοδική : $\lim P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \lim P_{ij}^{(n)}$

ΘΕΩΡΗΜΑ FOSTER(!)

Σε μια μη-διαχωρίσιμη εργοδική (θετικώς επ/κή κ' απεριοδική) Μ.Α υπάρχει το διάνυσμα των οριακών πιθανοτήτων $\underset{\sim}{\Pi} = (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \ldots)$ και ικανοποιεί τη σχέση $\underset{\sim}{\Pi} = \underset{\sim}{\Pi} \cdot P$

Αν επιπλέον $\underset{\sim}{X} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ είναι λύση της $\underline{X} = \underline{X} P$ με $\sum |x_i| < \infty$ τότε το $\Pi = cX$ τ/ώ $\sum \Pi_i = 1$.

Αντίστροφα, μια μη-διαχωρίσιμη απεριοδική Μ.Α είναι θετικώς επ/κή (άρα <u>εργοδική</u>) όταν υπάρχει $\underset{\sim}{x}$ που ικανοποιεί την $\underline{X}=\underline{X}P$

με (i) όχι όλα τα $x_i=0$

(ii) $\sum|x_i|<\infty$.

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

$d_1=1$ Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν
$d_0=1$ μεταξύ τους άρα είναι του ίδιου
$d_2=1$ τύπου.

$$P=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \\ \cdots & b_0 & b_1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & b_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}$$

Μη-Διαχωρίσιμη
Απεριοδική, είναι του ίδιου τύπου
<u>Αν</u> είχα πεπ/νο πλήθος: Θετικώς επ/κή.

<u>Παράδειγμα 1 (3.10.8)</u>

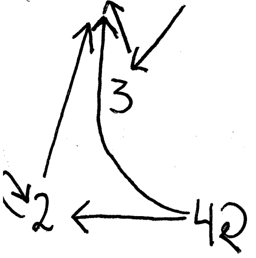
$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

(α) Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις

(β) Να βρεθούν οι οριακές πιθανότητες

(γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος επανάληψης των επαναληπτικών.

<u>Λύση</u>

(α) 

$\{0,1,3\}$: επαναληπτικές (θετικώς διότι πεπ/νο πλήθος)

2,4 : Παροδικές

(β) Αφού 2,4 παροδικές, τότε συγκλίνει άρα $\pi_2=\pi_4=0$

Για να βρω τις π_0, π_1, π_3 φτιάχνω ένα νέο πίνακα μετάβασης που θα έχει ΜΟΝΟ το κλειστό κύκλωμα $\{0,1,3\}$

$$P= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 0 & \\ 0 \arrow[urr] & & & 3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ΜΚΔ$\{2,3\}=1$ άρα η περίοδος του 0 είναι 1 άρα είναι απεριοδική.

Αφού είναι θετικώς επ/κή και απεριοδική χρησιμοποιώ το "ευθύ" του θεωρήματος του Foster.

$\underline{x}=(x_0, x_1, x_3)$

θα λύσω: $\underline{x}=\underline{x}P$

$$\Rightarrow (x_0 \ x_1 \ x_3) = (x_0 \ x_1 \ x_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{x_0 = \frac{1}{4}x_1 + x_3} \\ x_1 = x_0 \\ x_3 = \frac{3}{4}x_1 \end{cases}$$

θα πετάω μία εξίσωση γιατί το σύστημα αυτό δεν έχει μοναδική λύση, αλλά άπειρες

$\Rightarrow (x_1, x_1, \frac{3}{4}x_1)$ Γενική Λύση

Μία λύση της $\underline{x}=\underline{x}P$ είναι η $(4,4,3)$

$(\pi_0,\pi_1,\pi_3)=c(4,4,3)$ τ/ώ $\pi_0+\pi_1+\pi_3=1 \Rightarrow (4+4+3)c=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{11}}$

$(\pi_0,\pi_1,\pi_3)=\left(\frac{4}{11},\frac{4}{11},\frac{3}{11}\right)$

(γ) Από θεώρημα έχουμε: $\lim P_{ij}^{(n)} = \lim P_{j}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} \Rightarrow \mu_j = \frac{1}{\lim} = \frac{1}{\pi_j}$

$$\begin{cases} \mu_0 = \frac{11}{4} \\ \mu_1 = \frac{11}{4} \\ \mu_3 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα 2</u> (3.10.9)

Ένας επιχειρηματίας διαλέγει για τις καλοκαιρινές του διακοπές:

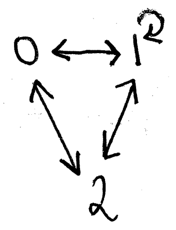
ΜΠΑΧΑΜΕΣ=0
ΕΥΡΩΠΗ=1
ΧΑΒΑΗ=2

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(α) Να περιγραφεί ως μαρκοβιανή αλυσίδα.
(β) Να βρεθούν οι πιθανότητες των προτιμήσεων του επιχειρηματία μετά από πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα.
(γ) Αν φέτος πέρασε τις διακοπές του στην Ευρώπη, μετά από πόσα χρόνια αναμένεται να ξαναεπισκεφθεί την Ευρώπη; (δηλ. οριακές πιθ.)
(Αν έλεγε μετά από 5 χρόνια: P_{ij}^{5})

<u>Λύση</u>

(α) Το μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν.

(β) 

Μη-διαχωρίσιμη με πεπ/νο πλήθος, θετικώς επ/κή.
Απεριοδική

$$\underline{X} = \underline{X} P \Rightarrow (X_0 \;\; X_1 \;\; X_2) = (X_0 \;\; X_1 \;\; X_2) \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_0 = \frac{3}{8} X_1 + \frac{1}{2} X_2 \\ \cancel{X_1 = \frac{2}{3} X_0 + \frac{1}{8} X_1 + \frac{1}{2} X_2} \\ X_2 = \frac{1}{3} X_0 + \frac{1}{2} X_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{3}{8} X_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} X_0 + \frac{1}{2} X_1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{X_0 = \frac{3}{4} X_1} \qquad X_2 = \frac{1}{4} X_1 + \frac{1}{2} X_1 = \boxed{\frac{3}{4} X_1 = X_2}$$

Γενική Λύση $(X_0, X_1, X_2) = \left(\frac{3}{4} X_1, X_1, \frac{3}{4} X_1\right)$

Μία λύση είναι $(3, 4, 3)$

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (3c, 4c, 3c)$ τ.ώ. $(3+4+3)c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{10}}$

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}\right)$

(γ) $\mu_1 = \frac{10}{4}$

<u>Παράδειγμα 3</u> (3.10.7)

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & & & & & \\ 0.7 & 0.3 & & & & & \\ & & 0.3 & 0.5 & 0.2 & & \\ & & 0.6 & 0 & 0.4 & & \\ & & 0 & 0.4 & 0.6 & & \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above] \arrow[r, leftrightarrow] & 1 \arrow[loop above] \\ 2 \arrow[loop above] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr] & 3 \arrow[d] \\ & 4 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

επ/κές θετικώς.

$\{0,1\}$ επ/κές θετ

$\{2,3,4\}$ επ/κές θετικώς

$\{5,6\}$ παροδικές

$\pi_5=\pi_6=0.$

$$P_1=\begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0.2 & 0.8 \\ 1 & 0.7 & 0.3 \end{array} \quad , \quad P_2=\begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 3 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 4 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{array}$$

$$(x_0 \; x_1)=(x_0 \; x_1)\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0=0.2x_0+0.7x_1 \\ x_1=0.8x_0+x_1 0.3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_0 \cdot 0.8=0.7x_1 \Rightarrow \boxed{x_0=\frac{7}{8}x_1}$$

Γενική Λύση: $\left(\frac{7}{8}x_1, x_1\right)$

Για $x_1=8$: $(7,8)$

$$(\pi_0 \; \pi_1)=\left(\frac{7}{15}, \frac{8}{15}\right), \; c=\frac{1}{15}.$$

$$(x_2 \; x_3 \; x_4)=(x_2 \; x_3 \; x_4)P_2$$

$\vdots$

Γενική Λύση:

$$(x_2, x_3, x_4)=\left(\frac{6}{7}x_3, x_3, \frac{10}{7}x_3\right)$$

$$\pi=(6c, 7c, 10c)=\left(\frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}\right)$$

Τ/ώ $(6+7+10)c=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{23}}$

Άρα: $(\pi_0, \pi_1)=\left(\frac{7}{15}, \frac{8}{15}\right)$ $(=1)$

$(\pi_2 \; \pi_3 \; \pi_4)=\left(\frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}\right)$ $(=1)$

$(\pi_5 \; \pi_6)=(0,0)$

Στη μονάδα οι οριακές πιθανότητες αθροίζουν σε ένα κλειστό κύκλωμα!!!

<u>Πίνακας μετάβασης στοχαστικής διαδικασίας με 1 φρ. ανάκλασης στην κατάσταση 0</u>

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 1-p-q & p & & \\ 0 & q & 1-p-q & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Μη-διαχωρίσιμη $\quad 0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3 \dots$ γιατί όλες επικοινωνούν μεταξύ τους.

Απεριοδική, διότι π.χ $d_0=1$

Δεν έχει πεπ/νο πλήθος άρα χρησιμοποιώ το "αντίστροφο" του θεωρήματος

$\underline{X} = \underline{X} P \Rightarrow (X_0 \; X_1 \; X_2 \dots) = (X_0 \; X_1 \; X_2 \dots) P$

$\Rightarrow X_0 = X_0(1-p) + qX_1$

$\Rightarrow pX_0 = qX_1 \Rightarrow \boxed{X_1 = \frac{p}{q} X_0}$

$X_1 = X_0 p + X_1(1-p-q) + X_2 q \Rightarrow$

$X_1 = \frac{\cancel{q}}{\cancel{p}} X_1 \cancel{p} + X_1(1-p-\cancel{q}) + X_2 q \Rightarrow$

$pX_1 = qX_2 \Rightarrow$

$X_2 = \frac{p}{q} X_1 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 X_0$

$$X_2 = pX_1 + (1-p-q)X_2 + qX_3 \Rightarrow$$

$$X_2 = \cancel{p}\frac{q}{\cancel{p}}X_2 + (1-p-q)X_2 + qX_3 \Rightarrow$$

$$X_2 p = qX_3 \Rightarrow$$

$$X_3 = \frac{p}{q}X_2 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 X_0$$

$$(X_0, X_1, X_2, \ldots) = \left(X_0, \frac{p}{q}X_0, \left(\frac{p}{q}\right)^2 X_0, \left(\frac{p}{q}\right)^3 X_0, \ldots\right)$$

Άρα υπάρχει λύση $\left(1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \ldots\right)$ που είναι τέτοια να μην είναι όλα του $X_i = 0$ (αυτό ισχύει $\forall X_0 \neq 0$)

$\sum_{i=0} \left(\frac{p}{q}\right)^i < \infty$ συγκλίνει αν $\frac{p}{q} < 1$, δηλ. όταν $p < q$.

Αν $p \geq q \longrightarrow$ <u>δεν</u> είναι εργοδική $\rightarrow$ οριακές πιθανότητες είναι ίσες με το μηδέν.

Όταν $p<q$ τότε είναι εργοδική. Μια λύση του $X = XP$ είναι η $\left(1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \left(\frac{p}{q}\right)^3, \ldots\right)$.

$$\Pi = c\left(1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \left(\frac{p}{q}\right)^3, \ldots\right)$$

$$c\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^i = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^i} = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{p}{q}}} \Rightarrow \boxed{c = 1 - \frac{p}{q}}$$

$$\boxed{\Pi_i = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^i}$$

Ασκήσεις: 4, 6, 7, 9, 11-18, 20

(8 εκτός ύλης)

18/12/14
Πέμπτη

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ \vdots & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ \vdots & \cdot & b_0 & b_1 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Poisson(λ)
Exp(μ)

Παλιά θέματα: Ασκήσεις 35, 43, 51

$$b_k = P(k \text{ αφίξεις κατά τη διάρκεια μιας εξυπηρέτησης}) = \frac{\mu \lambda^k}{(\mu+\lambda)^{k+1}}, \quad k=0,1,\ldots$$

Άσκηση 35

Ταμείο: 1 υπάλληλος

→ Poisson(λ)

Ουρά: άπειρη χωρητικότητα

χρόνος εξυπηρέτησης → $b(t)$, $t \geq 0$

X_n: ο αριθμός των πελατών στο σύστημα μετά την εξυπηρέτηση του n-οστού πελάτη.

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A, & X_n > 0 \\ A, & X_n = 0 \end{cases}$$

Εδώ πρέπει να εξηγήσω το κάθε σύμβολο και γράφω τον πίνακα μετάβασης.

$$b_k = P(A=k) = \int_0^\infty \text{Poisson} \underset{b(t)}{\underline{\quad}}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \mu e^{-\mu t} dt, \quad t \geq 0$$

Ψάχνουμε τα π_j (οριακές πιθανότητες)

Άσκηση 43

Όπως την άσκηση 35 αλλά μου δίνει τα $\lambda=4, \mu=7$.

Ερώτημα: Ποια η πιθανότητα μετά την ολοκλήρωση του ελ. οποιουδήποτε προϊόντος σε στατ. ισορ. να υπάρχουν άλλα δύο προϊόντα;

Άρα ψάχνω το Π_2.

→ Είναι μη-διαχωρίσιμη, ~~πεπερασμένη~~ μη-πεπερασμένη $\Rightarrow$ Θ. Foster.

Άσκηση 51

$\lambda=5$

$X_n =$

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_{n-1}+A \\ A \end{cases}$$

Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης όταν ο χρόνος ελέγχου είναι 3 ή 4 ή 5 μονάδες χρ. με πιθανότητες $1/2, 1/4, 1/4$.

$$b_k = P(A=k) = P(A=k \mid \text{χρον. εξ } 3)\, P(\xrightarrow{1/2}\cancel{\text{χρόνος εξ. } 3}) + P(A=k \mid \text{χρόνος εξ. } 4)\, P(\xrightarrow{1/4}\cancel{\text{χρόνος εξ. } 4}) + P(A=k \mid \text{χρόνος εξ. } 5)\, P(\xrightarrow{1/4}\cancel{\text{χρόνος εξ. } 5})$$

με $P(A=k \mid t) = \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, $t=3,4,5$

$$= \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^k}{k!} + \frac{e^{-4\lambda}(4\lambda)^k}{k!} + \frac{e^{-5\lambda}(5\lambda)^k}{k!}$$

Και ψάχνω πάλι το Π_2 με $\mu=10$.

SOS Υπολογισμός του Π (για τις ασκήσεις 35, 43, 51)

Μη-διαχωρίσιμη Μ.Α (όχι πεπ/νου πλήθους κατ/ων), απεριοδική (π.χ $d_0 = 1$)

Χρησιμοποιούμε το αντίθετο του Foster γιατί όχι πεπ/νου πλήθους ⇒ δεν γνωρίζω αν είναι θετικώς επ/κή.

$X = XP$

$(X_0, X_1, \dots) = (X_0, X_1, \dots)P$

$$X_0 = X_0 b_0 + X_1 b_0 \Rightarrow X_1 = \frac{1-b_0}{b_0} X_0 = \frac{1-\frac{\mu}{\mu+\lambda}}{\frac{\mu}{\mu+\lambda}} = \frac{\lambda}{\mu} X_0 = \rho X_0$$

→ ρ καλλιγραφικό

$$X_1 = X_0 b_1 + X_1 b_1 + X_2 b_0 \Rightarrow X_2 b_0 = (\rho X_0 - X_0 b_1 - \rho X_0 b_1)$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{X_0}{b_0}(\rho - b_1 - \rho b_1), \text{ όπου } b_1 = \frac{\mu\lambda}{(\mu+\lambda)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_2 = \rho^2 X_0}$$

$$X_2 = X_0 b_2 + X_1 b_2 + X_2 b_1 + X_3 b_0 \Rightarrow X_3 b_0 = (\rho^2 X_0 - X_0 b_2 - \rho X_0 b_2 - \rho^2 X_0 b_1$$

$$\Rightarrow \boxed{X_3 = \rho^3 X_0}$$

⋮

$$X_k = \rho^k X_0$$

Άρα το $X = XP$ έχει λύση

$$X = (X_0, \rho X_0, \rho^2 X_0, \dots) \text{ με } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i x_0 < \infty$ Πρέπει να ισχύει αυτό για να είναι εργοδική Μ.Α (αντίστροφο του Θ. Foster)

Άρα πρέπει το $\rho < 1 \Rightarrow \lambda < \mu$.

Όταν $\lambda < \mu$ τότε $\Pi = c X$ όπου X είναι μια λύση του $X = XP$ τ/ω <u>όχι</u> όλες οι συνιστώσες μηδέν (εδώ Θ. Foster)

Διαλέγω $X_0 = 1$, οπότε $\Pi = c(1, \rho, \rho^2, \rho^3, \dots)$

Θέλω $\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = 1 \Rightarrow c \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1-\rho}$

Δηλ. $\Pi_i = (1-\rho)\rho^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Άρα όταν σε άσκηση ζητάει το $\Pi_2 = (1-\rho)\rho^2$ εμείς αναζητάμε το $\boxed{\mu_2 = \frac{1}{\Pi_2}}$

Άσκηση 4,7

$$P = \begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \; \dots \\
\hline
0 & q & p & 0 & 0 & 0 \; \dots \\
1 & q & 0 & p & 0 & 0 \; \dots \\
2 & q & 0 & 0 & p & 0 \; \dots \\
3 & q & 0 & 0 & 0 & p \; \dots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

με $p + q = 1$.

(4) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες :

$P_{00}^{(2)} = P\left(0 \begin{smallmatrix}\nearrow 0 \begin{smallmatrix}\nearrow 0\\ \searrow \cancel{1}\end{smallmatrix}\\ \searrow 1 \begin{smallmatrix}\nearrow 0\\ \searrow \cancel{2}\end{smallmatrix}\end{smallmatrix}\right) \Rightarrow P(0 \to 0 \to 0 \text{ ή } 0 \to 1 \to 0) = q^2 + pq = q(\underbrace{\cancel{p+q}}_{1}) = q$

$$P_{01}^{(2)} = P(0 \to 0 \to 1) = qp$$

$$P_{02}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 2) = p^2$$

Μπορώ να κάνω και την απόδειξη του $P(n) = P(0)\,P^n$

$$P(n) = P(0) \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$P_{ij}^{(n)}$ το βρίσκω από τον P^n

αλλά είναι χρονοβόρο.

$$P_{i0}^{(2)} = P\left(i \begin{array}{l} \nearrow 0 \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \searrow \cancel{1} \end{array} \\ \searrow i+1 \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \searrow \cancel{i+2} \end{array} \end{array} \right) = P(i \to i+1 \to 0 \;\text{ ή }\; i \to 0 \to 0) = pq + q^2 = q$$

$$P_{i1}^{(2)} = P(i \to 0 \to 1) = qp$$

$$P_{i\,i+2}^{(2)} = P(i \to i+1 \to i+2) = p^2$$

7) $f_{00}^{*} \underset{\text{ορ.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}$

$$f_{00}^{(1)} = q$$

$$f_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = pq$$

$$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = p^2 q$$

$\vdots$

$$f_{00}^{(n)} = p^{n-1} q \quad , n = 1, 2, \ldots$$

Άρα $f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} q = q \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} = q \frac{1}{1-p} = 1$

(η 0 είναι επαναληπτική, άρα αφού όλες οι καταστάσεις είναι του ίδιου τύπου, είναι όλες επ/κές)

$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} q = q \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{q}$ (θετικώς επ/κή)

Άσκηση 6

X_n: αριθμός επιτυχιών σε n ανε/τες δοκιμές Bernoulli με $P(E) = p$.

Άρα γράφω τον πίνακα μετάβασης P και μετά γράφω το $P_{ij}^{(n)}$.

Παρόν

Μέλλον

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & q & p & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

p: πιθ. επιτυχίας

q: πιθ. αποτυχίας

$P_{ij}^{(n)} = P\left(\begin{matrix}\text{να πάω από } i \text{ σε } j \\ \text{επιτυχίες σε } n \text{ βήματα}\end{matrix}\right) = \begin{cases} 0 & , j<i \\ 0 & , j-i>n \\ \binom{n}{j-i} p^{j-i} q^{n-(j-i)} & , \text{αλλού} \end{cases}$

Διωνυμική $\left(P(X=x) = \binom{n}{x} p^x p^{n-x}\right)$ ή αλλιώς θα μπορούσα να το γράψω: $j-i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

Ασκήσεις 29, 40, 46

(29) 0 = τέλεια

1 = ελαττωματικά

$$P(0\to 0)=3/4$$

$$P(1\to 1)=1/3$$

$$P=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P_{00}^{(3)}=;$$

$$\Pi_0=;$$

$\boxed{\text{Τελ.}}$ $\boxed{\text{Τελ.}}$ $\boxed{\text{Τελ.}}$ $\boxed{\text{Τελ.}}$ $\boxed{\text{Ελατ.}}$

1ο ... 5ο

Τώρα θα πρέπει να αποδείξω το:

$$\begin{cases} P^{(n)}=P^{(0)}P^{n} \quad (\text{2 καταστάσεις}) \\ P^{(n)}=P^{(0)}\begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$P^{9}=\begin{bmatrix} P_{00}^{(9)} & P_{01}^{(9)} \\ P_{10}^{(9)} & P_{11}^{(9)} \end{bmatrix}$$

$$P^{9}=Q\begin{bmatrix} \lambda_1^{9} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{9} \end{bmatrix}Q^{-1}$$

Κάνω όλες τις αποδείξεις και θα πρέπει να βρω το $P_{00}^{(9)}$.

Για το Π_0

Μη-διαχ. μ.α

$\underline{\text{Foster}} \Longrightarrow X = XP$

$$\Rightarrow (X_0, X_1) = (X_0, X_1)P$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_0 = X_0\, 3/4 + X_1\, 2/3 \\ X_1 = X_0\, 1/4 + X_1\, 1/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}X_0 = \frac{2}{3}X_1 \Rightarrow \boxed{X_0 = \frac{8}{3}X_1}$$

Άρα $\left(\frac{8}{3}X_1, X_1\right)$ για $X_1 = 3$: $(8, 3)$

$$\Pi = CX = (8C, 3C)$$

$$8C + 3C = 1 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{11}}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \boxed{T} & \to & \boxed{T} & \to & \boxed{T} & \to & \boxed{T} & \to & \boxed{E} \\ 1^{\underline{o}} & & 2^{\underline{o}} & & 3^{\underline{o}} & & 4^{\underline{o}} & & 5^{\underline{o}} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^3}{4^4}$$

Έστω T η τ.μ που παριστάνει τον αριθμό των ψυγείων μέχρι να βρουν το $1^{\underline{o}}$ ελαττωματικό ξεκινώντας από τέλειο ψυγείο.

ET;

Δυνατές τιμές της T: $1, 2, 3, 4, \ldots$

$P(T=1) = \alpha$

$P(T=2) = (1-\alpha)\cdot\alpha = P(0 \to 0 \to 1)$

$P(T=3) = (1-\alpha)^2\alpha$

⋮

$$P(T=k)=(1-a)^{k-1}a \quad , k=1,2,\dots$$

$$ET=\sum_{n=1}^{\infty} k(1-a)^{k-1}\cdot a = a\sum_{k=1}^{\infty} k(1-a)^{k-1} = a\left(\frac{1}{1-(1-a)}\right)^2 = \frac{1}{a}$$

40) 0=κακή

1=καλή

$P(\text{καλή} \to \text{κακή}) = 0,335$

$P(\text{κακή} \to \text{καλή}) = 0,25$

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,335 & 1-0,335 \end{bmatrix} \end{array}$$

6 Σεπτ. → καλή <u>αν</u> 1 Σεπτ. → καλή

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$

Άρα ψάχνω $p_{11}^{(5)}$, ίδια απόδειξη με πριν.

Έστω T η τ.μ που παριστάνει το μήκος μιας περιόδου που χαρακτηρίζεται από καλές μέρες.

ET;

Δυνατές τιμές: 1,2,3, ...

$P(T=1)=b$

$P(T=2)=(1-b)b$

$P(T=k)=(1-b)^{k-1}b$

$ET=\frac{1}{b}$

16) $0 =$ τέλειο
$1 =$ ελατ.

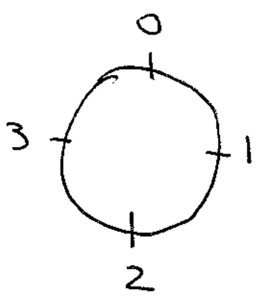
$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$P_{00}^{(17)}$ Άρα νδο $\begin{cases} p^{(n)} = p^{(0)} P^n \\ p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \end{cases}$ και να προσδιορίσω

τον P^n

Η αλυσίδα είναι μη-διαχωρίσιμη Μ.Α, πεπ/νου πλήθους άρα θετικώς επ/κή κ' απεριοδική.
Άρα υπάρχουν οι οριακές πιθανότητες.
Για να τις βρω: $X = XP$
$\Pi = cX$, $\Pi_0 + \Pi_1 = 1$

Άσκηση 9



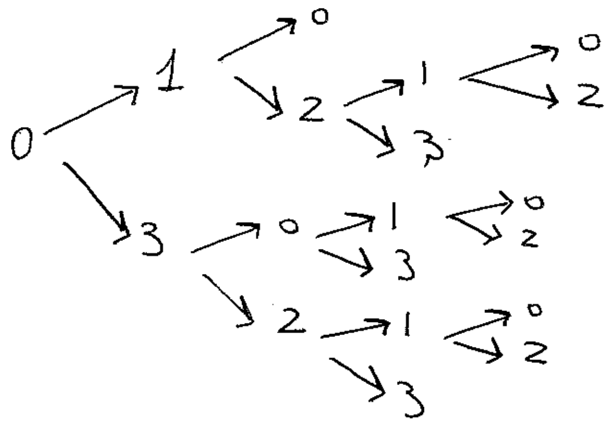
P(βήματα δεξιά) $= p$
P(βήματα αριστερά) $= q$
$p + q = 1$

X_n: η θέση του σωματιδίου μετά από n βήματα

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Είναι μη-διαχωρίσιμη Μ.Α πεπ/νου πλήθους καταστάσεων.

Για την περίοδο :



Είναι 2 άρα δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω το Θ. Foster. Άρα μόνο με τον ορισμό.

$P(X_1=3)$

Αν ήταν $P(X_{15}=3)$ θα έκανα την απόδειξη του $p^{(n)}=p^{(0)}P^n$

$p^{(0)}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

Άρα $p^{(1)}=p^{(0)}P$
$\Downarrow$
αυτό ψάχνω

Άλλος τρόπος: $P(X_1=3)=P(X_1=3/X_0=0)\,P(X_0=0)$
$+P(X_1=3/X_1=1)\cdot P(X_1=1)$
$+\ldots$

Ασκήσεις

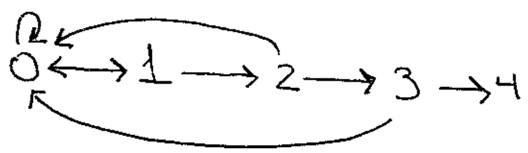
14

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & \cdots \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & \cdots \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$P_{k0}=\frac{k+1}{k+2}\,,\quad P_{k,k+1}=\frac{1}{k+2}$$

Αθροίζουν στη μονάδα, άρα είτε πάει στο 0 είτε ένα βη[μα] μπροσ[τά]

1. Είναι η αλυσίδα μη-διαχωρίσιμη;



κ.ο.κ.

Επικοινωνούν όλες οι καταστάσεις μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα, άρα η αλυσίδα είναι μη-διαχωρίσιμη.

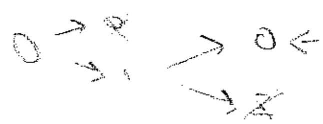
2. Να χαρακτηρίσω την 0 ως προς την επ/τα (ορισμός)

$$f_{00}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}$$

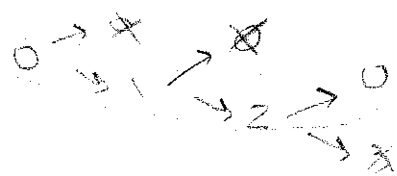
$$f_{00}^{(n)}=P\left(\begin{array}{l}\text{να επιστρέψω για 1η φορά στην} \\ \text{κατάσταση 0 στο n-οστό βήμα}\end{array}\right)$$

$$f_{00}^{(1)}=P_{00}^{(1)}=\frac{1}{2}$$

$$f_{00}^{(2)}=P(0\to 1\to 0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$



$$f_{00}^{(3)}=P(0\to 1\to 2\to 0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$$



$P(n-1\to 0)$

$$\| \quad P_{(n-1)0}=\frac{n-1+1}{n-1+2}=\frac{n}{n\cdot}$$

$$f_{00}^{(n)}=P(0\to 1\to 2\to\ldots\to n-1\to 0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}$$

$\|$

$P(n-2\to n-1)$

$$P_{(n-2)(n-2+1)}=\frac{1}{n-2+2}=\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{n+1}$$

Δίνεται ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1 \quad =\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\cdot n}-\frac{1}{2\cdot(n+1)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1-1}{2n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=1 \quad =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2\cdot n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{n}{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1$$

Άρα η κατάσταση 0 είναι επ/κή.

$$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty} n\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]=e-1 \qquad \text{θετικώς επ/κή}$$

ίδια η άσκηση 15

(15) Έστω μια ομογενής μαρκοβιανή αλυσίδα.

$$P_{k0}=\frac{1}{k+2} \qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$P_{k,k+1}=\frac{k+1}{k+2}$$

Δίνονται τα εξής:

$$\sum^{\infty}\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1$$

$$\sum\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=1$$

$$\sum n\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]=e-1$$

1. Είναι η αλυσίδα μη-διαχωρίσιμη; Ναι

Πίνακας μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & \dots \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

2. Να χαρακτηρίσετε την κατάσταση 0 ως προς την επ/τα (ορισμός)

$$f_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}$$

$$f_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$ $n=2$: $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ✓ Επαληθεύεται!

$$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$$ $n=3$: $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ ✓

$$f_{00}^{(n)} = P(0 \to 1 \to 2 \dots \to n-1 \to 0) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdots \frac{\cancel{n-1}}{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n(n+1)}$$

$$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$\mu_0 = \sum n f_{00}^{(n)} = \sum n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = \infty.$$ ασαφώς επ/κή

Να χαρακτηρίσετε την κατάσταση 2. (!)

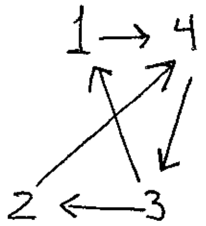
Αφού είναι μη-διαχωρίσιμη αν χαρακτηρίσω μια κατάσταση, ισχύει για όλες. Άρα και η κατάσταση 2 είναι ασαφώς επ/κή

(12) $E=\{1,2,3,4\}$

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ p & q & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$p+q=1$

$0<p<1$



Μη-διαχωρίσιμη.
και
Πεπ/νό πλήθος καταστάσε
Άρα : θετικώς επ/κές.

$1\to4\to3 \nearrow 2\to4\to3 \nearrow 2$, $\searrow 1$ 6 βήματα

$1\to4\to3 \searrow 1\to4\to3 \nearrow 2$, $\searrow 1$

3 βήματα   6 βήματα

ΜΚΔ$\{3,6,\ldots\}=3$

Άρα δε γίνεται Foster εδώ.

(13) $$P=\begin{bmatrix} p & 0 & q\\ 0 & 1 & 0\\ q & 0 & p \end{bmatrix}$$

$1 \leftrightarrow 3$

2

Να περιγραφούν οι καταστάσεις

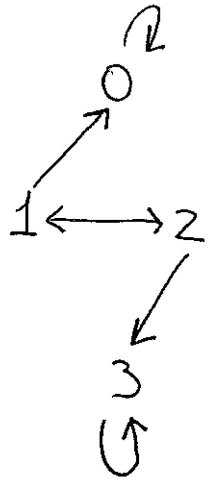
Θετικώς επ/κές οι 1 και 3. (κλειστό κ' πεπ/νό το πλήθος.)

Απορροφητική η 2

(16)

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & q & 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & q & 0 & p \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις:



3 απορροφητική

0 απορροφητική

1,2 παροδικές

1,2 δεν είναι κλειστό κύκλωμα

⇓

παροδικές

ή

$1 \to 3$ ✓

$3 \not\to 1$ ×

άρα δεν είναι επ/κή

ή

$f_{11}^{*} = pq < 1 \Rightarrow$ παροδ.

$f_{11}^{(1)} = 0$

$f_{11}^{(2)} = P(1 \to 2 \to 1) = pq$

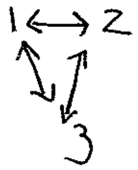
$1 \to 0 \to 0$
$\searrow 2 \to 1$
$\searrow 3$

$f_{11}^{(3)} = 0$

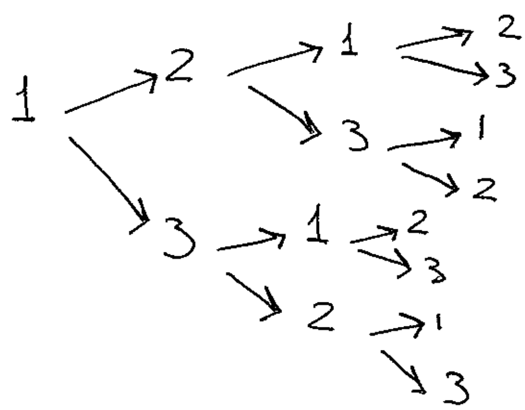
$1 \to 0 \to 0 \to 0$
$\searrow 2 \to 1 \to 2$
$\searrow 3 \to 3$

(17)

$$P=\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & p & q \\ 2 & q & 0 & p \\ 3 & p & q & 0 \end{array}$$



Μη-διαχωρίσιμη
+
πεπ/νο πλήθος καταστάσεων
$\Downarrow$
θετικώς επ/κές



$d_1=1$ απεριοδική

Άρα είναι εργοδική και μπορώ να χρησιμοποιήσω το Θ. Foster.

$X = XP$

$\Pi = cX$

$$\begin{cases} X_1 = X_2 q + X_3 p \\ X_2 = X_1 p + X_3 q \\ X_3 = X_1 q + X_2 p \end{cases}$$

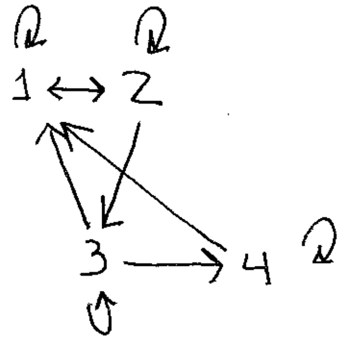
$X=(1,1,1)$ προφανής λύση.

$\Pi = c(1,1,1)$

$\Pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(18)

$$P=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 1/24 & 7/8 & 1/12 & 0 \\ 3 & 1/36 & 0 & 8/9 & 1/12 \\ 4 & 1/8 & 0 & 0 & 7/8 \end{array}$$



Μη-διαχωρίσιμη
+
πεπ/νο πλήθος
καταστάσεων
$\Downarrow$
θετικώς επ/κή

$\Pi = (\Pi_1 \ \Pi_2 \ \Pi_3 \ \Pi_4)$

$p_{33}^{(1)} > 0 \Rightarrow d_3 = 1$ άρα εργοδική

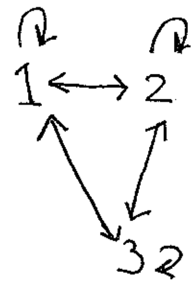
$X = XP$

$\Pi = cX$

Πρέπει να βρούμε: $\frac{1}{10}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{10}$

(20) Μαρκοβιανή (εξαρτάται μόνο από το παρόν)

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$



Μη-διαχωρίσιμη
\+
Πεπ/νο πλήθος
⇓
θετικώς επ/κές
απεριοδική
εργοδική

$\Pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)$;

Αν φέτον παίζει στην ομάδα 2, μετά από πόσα χρόνια προσδοκά να ξανά παίζει;

‖

μέση τιμή

$\boxed{\mu_2 = \frac{1}{\pi_2}}$

Θ. Foster: $\left(\frac{8}{29}, \frac{10}{29}, \frac{11}{29}\right)$

(21)

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & \Gamma \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ \Gamma \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

P(να ψηφίσει την 4η χρονιά A | ότι ψήφισε την A την 1η χρονιά).

$p_{AA}^{(3)} = p_{00}^{(3)}$

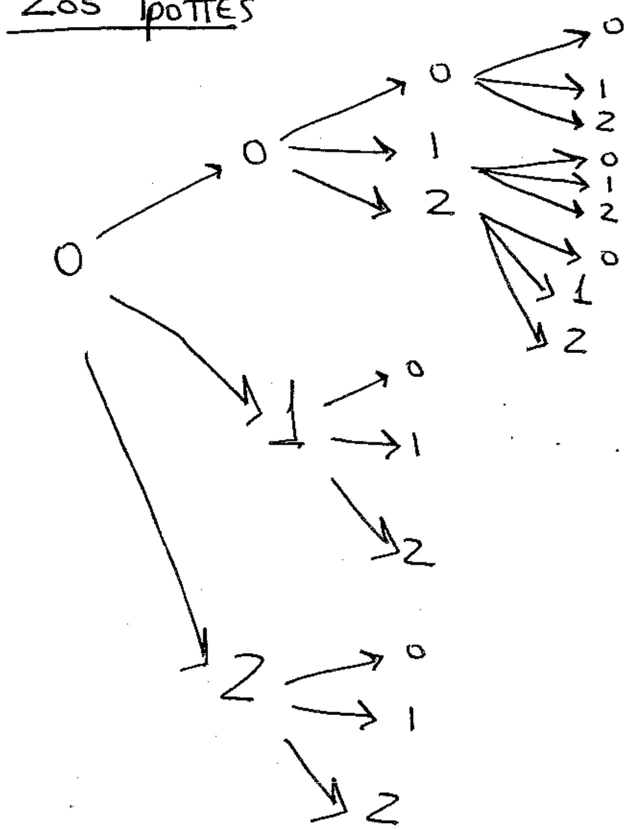
$p^{(n)} = p^{(0)} P^{n}$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & P_{02}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} & P_{12}^{(n)} \\ P_{20}^{(n)} & P_{21}^{(n)} & P_{22}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Αν ζητούσε απάντηση θα πρέπει να κάνω τις διπλανές αποδείξεις.

$P^3 \, (P \cdot P \cdot P)$

2ος Τρόπος



Αν θέλαμε το P^{18} και είχαμε και τις 3ς παρατάξεις δε θα βρίσκαμε τον αριθμό.

Αν είχα όμως 2 παρατάξεις μπορούμε να βρούμε το P^{18} (ιδιοτητές).

Απάντηση: $0,8(0,8^2+0,2^2)+0,2\cdot 0,2\cdot 1,4$.

Να μην δούμε:

1-3
28
39
54
57
58-60

8
31
33

Να δούμε:

36
38
37
40-42
43(!)
44
45
46
47 (!)
48
49
50
51
52
53
55
56
61
4-7
9
10
11-18
19-27
29-30
32
34-38

52. 0 = Παναγιώτης
1 = Κώστας
2 = Γιώργος

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Τρίτη

ΔΕΥ	
0.4	Π
0.3	Κ
0.3	Γ

(Δεν τα χρησιμοποιήσαμε στη λύση.)

Προσδοκά = αναμενόμενη τιμή

Μέσος χρόνος επανάληψης $\boxed{\mu_0}$

$\mu_0 = \sum n f_{00}^{(n)}$

ή $\mu_0 = \frac{1}{\pi_0}$ (Foster) (αυτό να χρησιμοποιήσω).

56. P(ξεκιν. από την i να επισκ. την j για 1η φορά μετά από n χρ. στιγ.)

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{array}$$

$f_{01}^{(n)} = P(\overbrace{0 \to 0 \to \dots \to 0}^{n-1 \text{ βήματα}} \to 1) = (1-a)^{n-1} \cdot a$

$f_{00}^{(n)} = P(0 \overbrace{\to 1 \to 1 \dots \to 1}^{n-1 \text{ βήματα}} \to 0) = a(1-b)^{n-2} \cdot b$

23 3 σκούφους

$P(\text{βρέχει ή χιονίζει}) = p$

X_n : αριθμός σκούφων στην αρχή της n-οστής διαδρομής

Μαρκοβιανή.

$$
P = \begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1-p & p \\
2 & 0 & 1-p & p & 0 \\
3 & 1-p & p & 0 & 0
\end{array}
$$

2. $\pi_0 = \dfrac{1-p}{4-p}$

3. Για να βρέχεται πρέπει να μην έχει σκούφο και να βρέχει, άρα:

$\pi_0 p = \dfrac{1-p}{4-p} \cdot p$

$$\max_p \left\{ \frac{1-p}{4-p} \cdot p \right\}$$

10

$$
P = \begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
1 & & 1 & & & & & & & \\
2 & 1/2 & & 1/2 & & & & & & \\
3 & & 1/2 & & 1/2 & & & & & \\
4 & & & 1/2 & & 1/2 & & & & \\
5 & & & & 1/3 & & 1/3 & & 1/3 & \\
6 & & & & & 1/2 & & 1/2 & & \\
7 & & & & & & 1/2 & & 1/2 & \\
8 & & & & & 1/3 & & 1/3 & & 1/3 \\
9 & & & & & & & & 1 &
\end{array}
$$